目　　录

引　　言

研究流形的热核对于了解流形的几何与分析性质都十分有用．众所周知，把热核关于时间变量t积分即可得到流形的Green函数，而Green函数又是在流形上做分析的重要工具．对于乘积流形而言，其热核就等于各个因子流形热核的积，但对于Green函数来说，积流形的Green函数却没有如此简单明了的关系．因此有时显式求出某些流形的Green函数就很困难．但若能写出其热核，那么再求Green函数就是件极简单的事情了．例如，直接要写出C^n中单位多圆盘的Green函数是比较困难的，若先求出C^1中单位圆盘的热核，再利用热核的积性质求出单位多圆盘的热核，然后对时间变量t积分即得到多圆盘的Green函数[6][7]．

对于欧氏空间R^n中通常的Laplace算子Δ以及它的谱理论，已有大量丰富的结果，而且也比较完善．究其原因，很大程度上在于R^n中许多公式有显式表达．

如，由$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$生成的热扩散半群$\{e^{-t\Delta}\}_{t>0}$（即热方程$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u$，$t>0$及初始值$u(x,0)$的解算子）就可以表示为与热核$(4\pi t)^{n/2}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$的卷积算子．从这个热核表达式出发，我们就可以很容易得出热半群的许多性质．诸如$u(x,t)$

$= (e^{-t\Delta}f)(x)$关于$t\in R^+$是C^∞光滑的，以及下列估计式

$$\|e^{-t\Delta}f\|_\infty \leqslant (4\pi t)^{n/2}\|f\|_1$$

等等.

由此可见R^n的热核显式表达式对于研究R^n的谱性质和分析性质都是很重要的.

对于一般的Riemann流形M，其上的Laplace-Beltrami算子Δ为二阶椭圆的负定微分算子. 若流形为完备的Riemann流形，则Δ又是自伴的. 自然我们就可以讨论它相对应的热方程. 习知：Riemann流形上的热方程是微分几何中的重要课题之一，它与调和分析、特征值问题以及不变微分算子理论都有着十分密切的联系. 我们把Laplace-Beltrami算子Δ对应的热方程的基本解称为该流形的热核，记之为$H_M(x,y,t)$，x，$y\in M$，$t\in R^+$. 从流形的热核$H_M(x,y,t)$出发，我们可以定义流形M上许多分析对象，比如Poisson核

$$P(x,y,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-s}\, s^{-\frac{1}{2}} H_M\left(x,y,\frac{t^2}{4s}\right)ds$$

等，使得R^n上的调和分析的经典理论的许多结果均可搬到完备Riemann流形上去，这方面结果可参见〔31〕、〔57〕、〔59〕等.

流形的热核最重要的意义在于它把流形的谱与其微分几何及其拓扑性质联系起来. 从热核的表达式出发，人们力图得到当时间变量t趋于0时，算子Δ局部迹的渐近展开式。由于渐近展开式的系数具有明显的几何意义，所以通过热核自然地把Δ的谱与流形的几何性质联系起来.

设M为紧致的完备Riemann流形，Δ为作用在函数上的Laplace-Beltrami算子，则Δ具有离散谱

$$0 \leqslant \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \cdots.$$

我们有 $$\operatorname{Trace} e^{t\Delta} = \sum e^{-\lambda_i t}$$

当$t>0$时收敛，并且

$$\operatorname{Trace}\ e^{t\Delta} = \int_M H(x,x,t)\,dv(x),$$

其中dv为M的体积元素.

Minashisundaran[53]证明了：$t\to 0+$时，$H(x,x,t)$的渐近展开式存在，

$$H(x,x,t) \underset{t\to 0+}{\sim} \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{n/2} \sum_{j\geqslant 0} a_j(x)t^j, \tag{1}$$

而且$a_0\equiv 1$. 所以作用在函数上的热算子有渐近展开式

$$\operatorname{Trace} e^{t\Delta} = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j} = \int_M H(x,x,t)\,dv(x)$$

$$\underset{t\to 0+}{\sim} \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{n/2} \sum_{j\geqslant 0} c_j t^j, \tag{1'}$$

并且$c_0 = \operatorname{vol}(M)$为$M$的体积. 由此可见$M$的谱完全决定了$M$的维数与体积. 同样（1′）中其它各项系数$c_j$亦有其几何意义. 研究比较其它项系数对于更深入了解流形的几何性质是很有帮助的. 需要指出的是流形的谱并不能完全决定该流形的几何，请参见M. Kac[83].

Gaffney在文〔14〕中，把渐近展开式（1）推广到作用在微分形式上的Laplace算子上去. 稍后，Mckean和Singer[18]又把渐近展开式（1）推广到可定向紧带边Riemann流形上满足Dirichlet或者Neumann边值条件的微分形式上. Greiner和Seeley[19][20]又把它推广到一般的椭圆算子和椭圆边值问题上. 在这些推广后的渐近展开式中，其各项系数包

含了更加丰富的几何信息.

例如，Mckean和Singer证明了：在Gaffney关于p形式热核的展开式

$$H(x,x,t)\underset{t\to0+}{\sim}t^{-n/2}\{a_0(p,x)+ta_1(p,x)+\cdots\}\qquad(2)$$

中，系数$a_j(p,x)$为曲率及曲率的协变导数的泛多项式（仅依赖于p，j及维数）．同时他们还证明了：对于展式

$$\text{Trace } e^{t\Delta}=t^{-n/2}\{\tilde{a}_0(p)+t\tilde{a}_1(p)+t^2\tilde{a}_2(p)+\cdots\},\qquad(3)$$

流形的Euler示性数等于各个展式中t^0系数$\tilde{a}_{n/2}(p)$的交替和，即

$$\chi(M)=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\tilde{a}_{n/2}(p).$$

另外，Gilkey 和 Patodi 分别独立地利用计算$t^j(j\leqslant0)$（对于$p=0$，1，…，n的渐近展开式中的t^j，$j\leqslant0$）的系数的某种组合，证明了对应于（所有$0\leqslant p\leqslant n$）p-形式的谱决定了 Chern-Gauss-Bonnet 公式中的被积函数，[22][23] 从而给出了Chern-Gauss-Bonnet公式的一个新证明.

Patodi[24]利用计算关于0-形式的、1-形式及2-形式的渐近展开式的前三项系数，证明了：对应的谱决定了流形是否为平坦的（有常纯量曲率，有常截曲率，或者是否为Einstein空间等）．由此可以看出通过微分形式热核更密切地把流形的微分形式对应的谱与其几何拓扑性质联系起来．因此研究流形的热核与微分形式热核，特别是显式表达出它们是很有意义的事情.

对于一般的完备Riemann流形M，加上某种限制曲率的

条件（比如 $\mathrm{Ric}(M)\geqslant -k$，$k\geqslant 0$）．对$M$的热核函数，S-T. Yau教授等许多作者做了大量深入的研究，给出了热核的比较定理及热核的各种估计，利用这些估计给出了 Green 函数的上、下界估计和特征值的一些估计．这方面的工作可参见丘成桐和 R. Schen的专著[25]．

对于某些流形显式写出其热核的工作始于陆启铿教授．他利用非常技巧性的方法先后显式给出了单位圆盘、C^n中多圆盘及超球的热核．随后陆启铿教授和洪毅教授合作显式构造出了第 I 类典型域 $R_I(m,n)$ 的热核．在陆启铿教授的指导和影响下，一些作者开始研究对称空间的热核，并且显式写出了一批对称空间的热核[9]．在本书的第四章，作者显式构造出了酉群及特殊酉群的热核．作为热核的应用，我们定出了酉群的谱．

对于复的范畴，人们有兴趣的是 $\bar\partial$-Laplace算子$\square$（即 Neumann 算子）对应的热核形式，以及 $\bar\partial_b$-Laplace 算子$\square_b$对应的热核形式．设M为一n维紧 Hermite流形，作用在(p,q)形式上的Neumann算子为

$$\square_{p,q}=\bar\partial\bar\partial^*+\bar\partial^*\bar\partial.$$

由于M紧致及$\square_{p,q}$为二阶椭圆微分算子，所以热方程

$$\square_{p,q}\omega=\frac{\partial\omega}{\partial t}$$

的基本解有光滑核$H_{p,q}(Z,W,t)$，其中H为M上的光滑地依赖于$t\in R^+$的两阶可微分的（p,q）形式．

而且$H_{p,q}(Z,W,t)$ 的局部迹有渐近展开式

$$H_{p,q}(Z,Z,t)\underset{t\to 0+}{\sim}\sum_{j\geqslant -n}C_j(z)t^j. \tag{4}$$

Patodi[27]通过计算渐近展式

$$H_{0,q}(Z,Z,t) \underset{t\to 0+}{\sim} \sum_{j\geqslant -n} C_j'(z)t^j$$

的系数 $C'_j(z)$($j\leqslant 0$)，从而证明了 Kähler 流形上的 Hirebruch-Riemann-Roch定理. Gilkey[28]通过计算关于热核的渐近展开式中的第二项系数以及关于$H_{0,1}(Z,Z,t)$和 $H_{1,0}(Z,Z,t)$ 的展式（4）中的第二项系数，证明了$\square_{1,0}$，$\square_{0,1}$及$\square_{0,0}$的谱决定了流形M是否为Kähler流形. Donnelly[29]和Gilkey[30]证明了：M的关于$\square_{p,q}$（$0\leqslant p+q\leqslant n$）的谱决定了$M$是否全纯同构于复投影空间 CP^n（带Fubini-Study 度量）. 由此可见，热核和(p,q)型热核形式把Neumann算子$\square_{p,q}$的谱与M的复几何联系起来. 研究复流形的热核和（p，q）形式热核对了解复流形的几何是有帮助的. 在本书的第五章，我们显式写出了C^n中复超球的（0,1）型热核形式，进而得到它的（0,1)-Green形式. 陆启铿教授通过复超球的（0,1)-Green形式，给出了复超球上$\bar\partial$方程解的（不变度量的）积分表示. 在第五章中，我们还显式写出了C^n中单位多圆盘的（0,1）形式热核，从而得到（0,1)-Green式. 作为应用，我们还给出了多圆盘上$\bar\partial$方程解的（不变度量的）积分表示. 需要指出的是，单位多圆盘不是强拟凸域，而是弱拟凸域. 因此我们所给的积分表示在多复变中是有意义的. 在本书的最后一章，我们显式写出了复投影空间CP^n的（0,1）形式热核及（0,1)-Green形式.

陆启铿教授曾证明了下述定理[4].

定理　设M为n维单连通完备的Kähler流形，且M具有常全纯截曲率，则M必双全纯同构于下列流形之一：

(1) 复n维欧氏空间C^n;

(2) n维复超球B^n;

(3) 复n维投影空间CP^n.

上述定理的确切表达见第二章.

由于C^n的热核及(0,1)形式热核的平凡性,因此在双全纯同构意义下,我们求出了n维单连通、常全纯截曲率的完备Kähler流形的(0,1)形式热核.

$\bar{\partial}_b$–Laplace算子$\Box_b$对应的热方程以及它的热核形式与C^n中的拟凸域的几何性质及C-R(Cauchy-Riemann)流形有着十分密切的关系.由于$\Box_b=\bar{\partial}_b^*\bar{\partial}_b+\bar{\partial}_b\bar{\partial}_b^*$在一般情况下甚至不是次椭圆(subelliptic)的,因此热方程

$$\Box_b\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

的研究自然会更困难.N.K.Stanton和D.S.Tartakoff在这个方向有许多研究,详细可参见他们的文章[61]、[62]、[63]等.

另外一个有意义的问题是向量从上Laplace算子的热方程.利用它可以证明指标定理.

对后两类热方程,本书不做介绍.有兴趣者可参见有关文献.

本书分为两部分.第一部分包括前两章,为预备知识部分.第二部分包含后五章,是本书的主要部分,它主要取材于作者的博士论文.

第一章 Riemann 几何初步

我们假定读者已了解微分流形的基本概念，诸如切空间、向量场、外微分形式等. 在本章中，我们简要介绍 Riemann 几何的基本常识，以便为后面讨论提供基础，并为复流形的几何研究提供一些背景知识.

本章及以后各章所论及的微分流形均为仿紧的 C^∞ 微分流形. 今后一般不再特别注明这条.

§1.1 联 络

对于 n 维微分流形 M，我们用 $C^\infty(M)$ 记 M 上所有 C^∞ 函数构成的环，用 $\mathscr{D}(M)$ 记 M 上 C^∞ 向量场的集合. 它是 C^∞ 函数环 $C^\infty(M)$ 上的模. 所谓联络，就是使我们能够对流形上向量场进行“微分”的一种手段. 我们欲在流形上做分析和研究其微分几何，微分技术自然成为最重要的概念之一.

定义1 M 上的联络是一个微分算子

$$\nabla: \mathscr{D}(M)\times\mathscr{D}(M)\to\mathscr{D}(M)$$

$$(X, Y)\mapsto\nabla_X Y$$

使得对于任何 $X, Y, Z\in\mathscr{D}(M)$，$f, g\in C^\infty(M)$，有

(∇_1) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

(∇_2) $\nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$.

$\nabla_X Y$ 称为 Y 关于 X 的协变导数，或共变导数.

对于 M 的任一坐标邻域 U，联络 ∇ 就诱导出 U 上的一个联络 ∇^U，设 $\{U, x^1, \cdots, x^n\}$ 为 M 的局部坐标系，则方程

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{1.1}$$

定义了 U 上的 n^3 个 C^∞ 函数 Γ_{ij}^k，它们称为 U 上的联络系数. 设 $\{V, y^1, \cdots, y^n\}$ 为 M 的另一局部坐标系，又有

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)=\widetilde{\Gamma}_{ij}^k\frac{\partial}{\partial y^k} \tag{1.2}$$

定义了 V 上的联络系数 $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$. 利用条件($\nabla_1$)和($\nabla_2$)，当 $U\cap V\neq\varnothing$ 时，通过简单计算得

$$\widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma=\sum_{i,j,k=1}^n\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial y^\beta}\cdot\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k}\Gamma_{ij}^k+\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2 x^j}{\partial y^\alpha\partial y^\beta}\cdot\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^j} \tag{1.3}$$

在(1.1)及(1.2)中我们使用了和号的省略.

另一方面，若已给 M 的一个局部坐标邻域的开覆盖及在每个坐标邻域 U 中有 n^3 个 C^∞ 函数 Γ_{ij}^k，使得在任两个相交的坐标邻域中，关系式(1.3)成立，则由(1.1)可定义 $\nabla^U_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x}$，因而得到 U 上的一个联络 ∇^U. 再由关系式(1.3)知：在 $U\cap V\neq\varnothing$ 上有 $\nabla^U=\nabla^V$. 故由它们唯一确定一 M 上的联络，确切地说是切丛 TM 上的联络. 这就是经典微分几何中定义联络的方法，它与定义1是完全等价的.

关于向量场的联络自然可以推广到张量场. 例如，对于一阶微分形式 ω，我们视之为 $\mathscr{D}(M)$ 的对偶空间 $\mathscr{D}^*(M)$ 中的元素，则可定义 $\nabla_X\omega$ 如下：

$$(\nabla_X\omega)(Y)=X\omega(Y)-\omega(\nabla_X Y),\quad X,\ Y\in\mathscr{D}(M).$$

一般地，我们有如下定义

定义2 设 ∇ 为 M 上的联络，X，$Y\in\mathscr{D}(M)$.

(1) 若 $f\in C^\infty(M)$，则 $\nabla_X f\equiv Xf$. (1.4)

(2) 若 ω 为 M 上的一阶微分形式，则

$$(\nabla_X\omega)Y\equiv X\omega(Y)-\omega(\nabla_X Y). \tag{1.5}$$

(3) 若 S，T 为 M 上的两个张量场，则

$$\nabla_X(S\otimes T)\equiv(\nabla_X S)\otimes T+S\otimes\nabla_X T. \tag{1.6}$$

由定义 2，我们就可以顺次定义 $(r\cdot s)$ 阶张量场的协变导数了.

有了联络，我们就可以定义挠率张量 T 和曲率张量 R：

$$T(X,\ Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,\ Y], \tag{1.7}$$

$$R(X,\ Y)=\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]}. \tag{1.8}$$

其中[，]为 Poisson 括号，即

$$[X,\ Y]=XY-YX.$$

容易验证 T 与 R 均为 $C^\infty(M)$多线性的，即

$$T(fX,\ gY)=fgT(X,\ Y), \tag{1.9}$$

$$R(fX,\ gY)hZ=fghR(Y,\ Y,\ Z), \tag{1.10}$$

$\forall f$，g，$h\in C^\infty(M)$，X，Y，$Z\in\mathscr{D}(M)$.

曲率刻划了协变导数交换次序的差. 为说明这点，我们考查下面简单例子.

取点 $p\in M$ 附近的一局部坐标 $\{x^1,\cdots,\ x^n\}$. 又设 $V=v^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$(今后我们均使用和号的省略)为 p 点附近的向量场. 记

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}V=v^k_{\ ,j}\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

因为$\left[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right]=0$，$i, j=1, \cdots, n$，故我们有

$$\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}-\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\right)V=\left(v^k_{;ji}-v^k_{;ij}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$=R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)v^k\frac{\partial}{\partial x^k}=v^kR\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$=v^kR^l_{kij}\frac{\partial}{\partial x^l}=-v^lR^k_{lij}\frac{\partial}{\partial x^k},$$

即有

$$v^k_{;ij}-v^k_{;ji}=-v^lR^k_{lij}. \tag{1.11}$$

(1.11)式通常称为 Ricci 公式.

§1.2 结构方程

取 M 的一个局部坐标系$\{U; x^1, \cdots, x^n\}$. 设$\{X_1, \cdots, X_n\}$为一组标架场，即 $X_i(i=1, \cdots, n)$为 U 上的向量场且 $X_1, \cdots, X_n$ 在 U 上线性无关. $\{\omega^1, \cdots, \omega^n\}$为其对偶的上标架场，即 $\omega^i(X_j)=\delta^i_j$. 记

$$\nabla_{X_i}X_j=\Gamma_i{}^k{}_jX_k \tag{2.1}$$

$$T(X_i, X_j)=T_i{}^k{}_jX_k \tag{2.2}$$

$$R(X_i, X_j)X_l=R^k_{lij}X_k \tag{2.3}$$

$$\omega^i_j=\Gamma_k{}^i{}_j\omega^k \tag{2.4}$$

其中 1-形式 ω^i_j 称为联络形式. 矩阵(ω^i_j)称为联络矩阵，它决定了联络.

定理1(E. Cartan 结构方程)

$$d\omega^i + \omega_l^i \wedge \omega^l = \frac{1}{2} T_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k, \tag{2.5}$$

$$d\omega_j^i + \omega_l^i \wedge \omega_j^l = \frac{1}{2} R_{jab}^i \omega^a \wedge \omega^b. \tag{2.6}$$

证明： 令$[X_j, X_k] = C_{jk}^i X_i$，对于 X_p，$X_q(p \neq q)$，我们有

$$\begin{aligned} & d\omega^i(X_p, X_q) + \omega_l^i \wedge \omega^l(X_p, X_q) \\ = & \frac{1}{2}\{X_p \omega^i(X_q) - X_q \omega^i(X_p) - \omega^i([X_p, X_q])\} \\ & + \frac{1}{2}\{\omega_l^i(X_p)\omega^l(X_q) - \omega_l^i(X_q)\omega^l(X_p)\} \\ = & -\frac{1}{2} C_{pq}^i + \frac{1}{2}\Gamma_{pq}^i - \frac{1}{2}\Gamma_{qp}^i, \end{aligned}$$

而 $$\begin{aligned} T(X_p, X_q) &= \nabla_{X_p} X_q - \nabla_{X_q} X_p - [X_p, X_q] \\ &= (\Gamma_{pq}^i - \Gamma_{qp}^i - C_{pq}^i) X_i, \end{aligned}$$

所以有

$$[d\omega^i + \omega_l^i \wedge \omega^l](X_p, X_q) = \frac{1}{2} T_{pq}^i. \tag{2.7}$$

另一方面，

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} T_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k(X_p X_q) \\ = & \frac{1}{4} T_{jk}^i [\partial_p^j \partial_q^k - \partial_q^j \partial_p^k] = \frac{1}{2} T_{pq}^i. \end{aligned} \tag{2.8}$$

由(2.7)式与(2.8)式，我们就证明了(2.5)式．同法有

$$[d\omega_j^i + \omega_l^i \wedge \omega_j^l](X_p, X_q)$$

$$=\frac{1}{2}\{X_p\omega^i_j(X_q)-X_q\omega^i_j(X_p)-\omega^i_j([X_p,X_q])\}$$

$$+\frac{1}{2}\{\omega^i_l(X_p)\omega^l_j(X_q)-\omega^i_l(X_q)\omega^l_j(X_p)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{X_p\Gamma^i_{qj}-X_q\Gamma^i_{pj}-\Gamma^i_{kj}C^k_{pq}+\Gamma^i_{pl}\Gamma^l_{qj}-\Gamma^i_{ql}\Gamma^l_{pj}\}. \tag{2.9}$$

(2.6)式右边作用在(X_p,X_q)上得到

$$\frac{1}{2}R^i_{jab}\omega^a\wedge\omega^b(X_p,X_q)$$

$$=\frac{1}{4}\{R^i_{jab}\omega^a(X_p)\omega^b(X_q)-R^i_{jab}\omega^a(X_q)\omega^b(X_p)\}$$

$$=\frac{1}{4}\{R^i_{jpq}-R^i_{jqp}\}=\frac{1}{2}R^i_{jpq}, \tag{2.10}$$

而且注意到

$$R(X_p,X_q)X_i=R^i_{jpq}X_i$$
$$=(\nabla_{X_p}\nabla_{X_q}-\nabla_{X_q}\nabla_{X_p}-\nabla_{(X_p,X_q)})X_j$$
$$=[\nabla_{X_p}(\Gamma^l_{qj}X_l)-\nabla_{X_q}(\Gamma^l_{pj}X_l)-C^a_{pq}\Gamma^l_{aj}X_l]$$
$$=(X_p\Gamma^l_{qj})X_l+\Gamma^l_{qj}\Gamma^k_{pl}X_k-(X_q\Gamma^l_{pj})X_l-\Gamma^l_{pj}\Gamma^k_{ql}X_k$$
$$-C^a_{pq}\Gamma^l_{aj}X_l$$
$$=(X_p\Gamma^i_{qj})X_i+\Gamma^l_{qj}\Gamma^i_{pl}X_i-(X_q\Gamma^i_{pj})X_i-\Gamma^l_{pj}\Gamma^i_{ql}X_i$$
$$-C^k_{pq}\Gamma^i_{kj}X_i,$$

于是

$$R^i_{jpq}=\{(X_p\Gamma^i_{qj})-(X_q\Gamma^i_{pj})-\Gamma^i_{kj}C^k_{pq}+\Gamma^i_{pl}\Gamma^l_{qj}$$
$$-\Gamma^i_{ql}\Gamma^l_{pj}\}. \tag{2.11}$$

由(2.9)、(2.10)及(2.11)这三式即得(2.6)式。这样就完成

了定理的证明.

结构方程在微分几何中是个很有用的工具. 作为结构方程的具体运用,我们证明一个所谓 Bianchi 恒等式.

记 $\Omega^i_j = R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l$,则有

$$d\Omega^i_j = \Omega^i_p \wedge \omega^p_j - \omega^i_p \wedge \Omega^p_j. \tag{2.12}$$

(2.12)式称为第二 Bianchi 恒等式.

证明: 由结构方程(2.6)有

$$d\omega^i_j = -\omega^i_p \wedge \omega^p_j + \frac{1}{2}\Omega^i_j.$$

对上式两端进行外微分得

$$\frac{1}{2}d\Omega^i_j = d\omega^i_p \wedge \omega^p_j - \omega^i_p \wedge d\omega^p_j.$$

再利用结构方程,有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}d\Omega^i_j &= -\omega^i_k \wedge \omega^k_p \wedge \omega^p_j + \frac{1}{2}\Omega^i_p \wedge \omega^p_j \\ &\quad + \omega^i_p \wedge \omega^p_k \wedge \omega^k_j - \frac{1}{2}\omega^i_p \wedge \Omega^p_j \\ &= \frac{1}{2}\Omega^i_p \wedge \omega^p_j - \frac{1}{2}\omega^i_p \wedge \Omega^p_j.\end{aligned}$$

即得 Bianchi 恒等式(2.12).

§1.3 Riemann 联络

C^∞ 微分流形 M 上如果存在一个对称且正定的(0,2)型张量场 g,即

(1) $g(X,Y) = g(Y,X)$, $X,Y \in \mathscr{D}(M)$.

(2) $g(X,X)\geqslant 0$; $g(X,X)=0\Longleftrightarrow X=0$.

则称(M,g)为 Riemann 流形. g 称为M的度量张量. 在局部坐标$\{x^1,\cdots,x^n\}$下, g 可表示为

$$g=g_{ij}dx^i\otimes dx^j.$$

在不引起混乱的情况下,我们习惯上把g写为

$$ds^2=g_{ij}dx^idx^j.$$

利用单位分解定理不难证明:一般微分流形上都存在 Riemann 度量. 同样也可利用 Whitney 嵌入(安装)定理,M可看成为 $\mathrm{R}^m(m\geqslant 2n+1)$的嵌入子流形. 我们把 R^m 上的欧氏度量拉回 (pull-back) 即得 M 上一个 Riemann 度量. 关于 Whitney 嵌入(或叫安装)定理可参见陆启铿著的《微分几何学及其在物理学中的应用》(科学出版社, 1982) 一书的 P214—P223.

定义1 设(M,g)为一 Riemann 流形, M 上的联络 ∇ 称为 Riemann 联络,如果它还满足

(1) 无挠,即 $T(X,Y)=\nabla_XY-\nabla_YX-[X,Y]=0$;

(2) 与 Riemann 度量相容,即

$$X\langle Y,Z\rangle=\langle\nabla_XY,Z\rangle+\langle Y,\nabla_XZ\rangle.$$

其中$\langle\, ,\, \rangle$表示关于g的内积,即$\langle X,Y\rangle=g(X,Y)$.

Riemann 联络也叫 Levi-Civita 联络或度量联络.

定理1 (Riemann 几何基本定理) Riemann 流形(M,g)上存在唯一 Riemann 联络.

证明:

(唯一性)设 ∇ 为(M,g)上的 Riemann 联络,则$\forall X,Y,Z\in\mathscr{D}(M)$,有

$$X\langle Y,Z\rangle=\langle\nabla_XY,Z\rangle+\langle Y,\nabla_XZ\rangle, \tag{3.1}$$

$$Y\langle Z,X\rangle=\langle\nabla_Y Z,Y\rangle+\langle Z,\nabla_Y X\rangle, \tag{3.2}$$

$$Z\langle X,Y\rangle=\langle\nabla_Z X,Y\rangle+\langle X,\nabla_Z Y\rangle. \tag{3.3}$$

(3.1) + (3.2) − (3.3)得

$$\begin{aligned}
&X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle\\
&=\langle\nabla Y_X,Z\rangle+\langle Y,[X,Z]\rangle\\
&\quad+\langle[Y,Z],X\rangle+\langle Z,\nabla_X Y\rangle+\langle Z,[Y,X]\rangle,\\
&2\langle\nabla_X Y,Z\rangle=X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle\\
&-\langle Y,[Y,Z]\rangle-\langle X,[Y,Z]\rangle-\langle Z,[Y,X]\rangle.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

由于(3.4)式对任何 $Z\in\mathscr{D}(M)$ 成立，故(3.4)式及度量 g 唯一确定了 $\nabla_X Y\in\mathscr{D}(M)$. 所$(M,g)$上 Riemann 联络唯一.

(存在性) 我们用公式(3.4)来定义 $\nabla_X Y$. 由于 Z 是任意选取，通过(3.4)作简单计算知 ∇ 满足联络的两个条件，现在仅需验证 ∇ 亦为 Riemann 联络. 由(3.4)式

$$\begin{aligned}
&2\langle\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y],Z\rangle\\
&=\{X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle-\langle Y,[X,Z]\rangle\\
&\quad-\langle X,[Y,Z]\rangle-\langle Z,[Y,X]\rangle\}-\{Y\langle X,Z\rangle\\
&\quad+X\langle Z,Y\rangle-Z\langle Y,X\rangle-\langle X,[Y,Z]\rangle-\langle Y,[X,Z]\rangle\\
&\quad-\langle Z,[X,Y]\rangle\}-2\langle[X,Y,],Z\rangle=0.
\end{aligned}$$

即 $T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]=0$.

同理,

$$\begin{aligned}
&2\langle\nabla_Z X,Y\rangle+2\langle\nabla_Z Y,Z\rangle\\
&=\{Z\langle X,Y\rangle+X\langle Y,Z\rangle-Y\langle Z,X\rangle-\langle X,[Z,Y]\rangle\\
&\quad-\langle Z,[X,Y]\rangle-\langle Y,[X,Z]\rangle\}+\{Z\langle Y,X\rangle\\
&\quad+Y\langle X,Z\rangle-X\langle Z,Y\rangle-\langle Y,[Z,X]\rangle\\
&\quad-\langle Z,[Y,Z]\rangle-\langle X,[Y,Z]\rangle\}\\
&=2Z\langle X,Y\rangle.
\end{aligned}$$

所以 ∇ 亦为 Riemann 联络．定理证毕．

§1.4 测地线与正规坐标系

设 (M, g) 为 n 维 Riemann 流形，∇ 为 M 上的 Riemann 联络．M 上的曲线（参数化）是一个光滑映射 $\gamma: (a, b)\to M$．M 上沿曲线 γ 的向量场 V 是个映射，它对每个 $t\in(a, b)$ 指定一个切向量 $v_t\in T_{\gamma(t)}(M)$．曲线 γ 在点 $\gamma(t)$ 的切向量定义为

$$\gamma'(t)=\gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right)=\frac{dx^j}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}\in T_{\gamma(t)}(M),$$

其中$\frac{d}{dt}$表示 1 维流形 (a, b) 上的标准向量场，而在局部坐标

$\{x^1, \cdots, x^n\}$中，$\gamma(t)$ 的坐标为 $(x^1(t), \cdots, x^n(t))$．

定义 1 如果沿 γ 的向量场 V 满足 $\nabla_{\gamma'}V=0$，则称向量场 V 沿 γ 是平行的．

令 $V=\eta^j\frac{\partial}{\partial x^j}$．若 V 沿 γ 是平行的，则

$$\nabla_{\frac{dx^j}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial x^j}}\left(\eta^l\cdot\frac{\partial}{\partial x^l}\right)=\frac{dx^j}{dt}\left(\frac{\partial\eta^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}+\Gamma^i_{jk}\cdot\eta^k\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=0.$$

$$\frac{d\eta^i}{dt}+\Gamma^i_{jk}(x(t))\,\eta^k\frac{dx^j}{dt}=0,\quad i=1, \cdots, n \qquad (4.1)$$

这是一个一阶常微分方程组．由解的存在唯一性定理知：对于固定的曲线 $\gamma(t)$，沿 γ 平行的向量场 $U(t)$ 由其初值 $V(0)$ 唯一确定．$V(t)$ 称为向量 $V(0)$ 沿 γ 平行移动的结果．

特别若 γ 的切向量 γ' 沿 γ 是平行的，即

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0, \tag{4.2}$$

则称曲线 γ 为 M 上的测地线.

在(4.1)中取 $\eta^i = (x^i(t))'$，即得测地线的微分方程

$$\frac{d^2x^l}{dt^2} + \Gamma^l_{jk}(x(t))\frac{dx^j}{dt}\cdot\frac{dx^k}{dt} = 0, \quad l = 1, \cdots, n. \tag{4.3}$$

这是一个二阶常微分方程组.

命题 1 测地线 γ: $(a, b) \to M$，它的参数 t 是 γ 的弧长 s 的线性函数，而且 t 为弧长参数当且仅当 $\|\gamma'(t)\| = 1$.

证明： 由于

$$\gamma'\langle\gamma', \gamma'\rangle = \langle\nabla_{\gamma'}\gamma', \gamma'\rangle + \langle\gamma', \nabla_{\gamma'}\gamma'\rangle = 0,$$

所以 γ 的切向量 γ' 的长度

$$\|\gamma'\| = \langle\gamma', \gamma'\rangle^{\frac{1}{2}}$$

沿测地线 γ 为常数. 引进 γ 的弧长

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\gamma'| dt = \|\gamma'\| t + \text{常数}.$$

命题证毕.

我们通常把 $\|\gamma'\| = 1$ 的测地线称为规范测地线.

引理 1 对于 $p_0 \in M$，存在 p_0 的一个邻域 U 及一正数 ε，使得对于任何 $p \in U$ 及每个 $v \in T_p(M)$，$\|v\| = \langle v, v\rangle^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$，存在唯一的一条测地线 γ_v: $(-2, 2) \to M$，满足

$$\gamma_v(0) = p \quad 及 \quad \gamma_v'(0) = v.$$

证明： 考虑测地线的微分方程组(4.3)，根据常微分方程组的理论知，存在 p_0 的一个邻域 U 和两个正数 ε_1，ε_2，使得对于任何 $p \in U$ 和 $v \in T_p(M)$，$\|\gamma\| < \varepsilon_1$，存在唯一的测地线

$$c_v:\ (-2\varepsilon_2,\ 2\varepsilon_2)\to M,$$

并满足初始条件

$$c_v(0)=p,\ c_v'(0)=v.$$

又选取一个正数 $\varepsilon<\varepsilon_1\varepsilon_2$，对于$\|v\|<\varepsilon$，我们定义

$$\gamma_v:\ (-2,\ 2)\to M$$

$$t\mapsto c_{v/\varepsilon_2}(\varepsilon_2 t).$$

易见
$$\gamma_v(0)=c(0)=p,$$

$$\gamma'_v(t)=\varepsilon_2 c'_{v/\varepsilon_2}(\varepsilon_2 t),$$

$$\gamma'_v(0)=\varepsilon_2\cdot c'_{v/\varepsilon_2}(0)=\varepsilon_2\cdot\frac{v}{\varepsilon_2}=v.$$

引理得证.

对于 $v\in T_p(M)$，若存在一条测地线 γ：$[0,\ 1]\to M$，使得

$$\gamma(0)=p,\quad \gamma'(0)=v,$$

我们记 $\gamma(1)=\exp_p(v)$，这样就得到一个映射 $\exp_p$，称之为 p 点的指数映射.

由引理 1 知道，若 $\|v\|$ 充分小，则 $\exp_p(v)$是确定的. 当$\|v\|$很大时，$\exp_p(v)$未必有定义. 只要它有定义，则$\exp_p(v)$总是唯一的.

命题 2　设 $p\in M$，并设对于 $v\in T_p(M)$（比如 $\|v\|$充分小），$\exp_p(v)$有意义，则 $\exp_p(tv)$，$|t|<1$ 是有意义的，而且 $\gamma(t)=\exp_p(tv)$是测地线，它还满足条件 $\gamma(0)=p$，$\gamma'(0)=v$.

证明：设 $\gamma(t)$为测地线使得

$$\gamma(0)=p,\quad \gamma'(0)=v,\quad \exp_p(v)=\gamma)1).$$

又设 $\tilde{\gamma}(t)$ 为测地线，使得

$$\tilde{\gamma}(0)=p,\ \tilde{\gamma}'(0)=cv,\ \exp_p(cv)=\tilde{\gamma}(1).$$

考虑曲线 $\gamma(ct)$，易知它也是测地线，且

$$\gamma(ct)|_{t=0}=\gamma(0)=p,$$

$$\gamma'(ct)|_{t=0}=cv.$$

由测地线的唯一性得

$$\tilde{\gamma}(t)=\gamma(ct),\quad \exp_p(cv)=\tilde{\gamma}(1)=\gamma(c).$$

最后用 t 代换 c 即有 $\gamma(t)=\exp_p(tv)$. 命题 2 证毕.

我们把 $TM=\bigcup\limits_{p\in M}T_p(M)$ 称为M的切丛，它是最直观的一种向量丛. 设U为含点 p 的坐标邻域，且局部坐标为$\{x^1,\cdots,x^n\}$. 所以任何U上的向量场均可写为$\xi^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$的形式. 于是$\{x^1,\cdots,x^n;\xi^1,\cdots,\xi^n\}$就为$TU\subset TM$上的局部坐标.

下面定理可视为正规坐标系的存在定理.

定理 1 对于任意点 $p\in M$，存在 p 的一个小邻域W及$\varepsilon>0$，使得对于任何 $q\in M$，指数映射 $\exp_q$ 把 $T_q(M)$ 中的开球

$$N_\varepsilon=\{v\in T_q(M)\mid \|v\|<\varepsilon\}$$

微分同胚地映到M的一个开集 U_q 上($q\in U_q$).

证明： 取 p 点附近的局部坐标系$\{U;x^1,\cdots,x^n\}$，$x^i(p)=x_0^i$. 对于任何切向量 $v=\xi^i\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\in T_p(M)$，则满足条件 $\gamma(0)=p$，$\gamma'(0)=v$ 的测地线 γ 在局部坐标$\{x^1,\cdots,x^n\}$中必满足下面初始条件

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}(x(t))\dfrac{dx^j}{dt} \cdot \dfrac{dx^k}{dt} = 0 \\ x^i(0) = x^i_0, \quad \dfrac{dx^i}{dt}(0) = \xi^i \end{cases} \quad i = 1, \cdots, n \tag{4.4}$$

设其解为 $x^i = f^i(t, x^i{}_0, \xi^i)$, $i = 1, \cdots, n$.

把 $x^i = f^i(t, x^i_0, \xi^i)$ 在 $t = 0$ 点进行 Taylor 展开

$$x^i = f^i(t, x^i_0, \xi^i) = x^i_0 + t\xi^i - \frac{1}{2}t^2\Gamma^i_{jk}\xi^j\xi^k + \cdots, \tag{4.5}$$

由引理 1 知，适当取 p 的邻域 U 及 $\|v\| < \varepsilon$，由(4.5)式定义的函数 $f^i(t, x^i_0, \xi^i)$ 中的 t 可定义在 $(-2, 2)$ 上去. 我们定义映射

$$(q, v) \to \exp_q(v).$$

由引理 1 知它在点 $(p, 0)$ 的某个邻域 $\mathscr{U}$ 上有定义且可微分

考虑光滑映射 F: $\mathscr{U} \to M \times M$

$$(q, v) \mapsto (q, \exp_q(v))$$

用 $\{y^1, \cdots, y^n, y^{n+1}, \cdots, y^{2n}\}$ 表示在 $U \times U$ 上的诱导坐标：

$$y^i = y^i,$$

$$y^{n+i} = f^i(1, x^i_0, \xi^i) = x^i + \xi^i - \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}\xi^j\xi^k + \cdots,$$

$$i = 1, \cdots, n.$$

下面我们计算 F 在点 $(p, 0)$ 的 Jacobi 矩阵 J.

$$J = \begin{bmatrix} \left[\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}\right](p, 0) & \left[\dfrac{\partial y^i}{\partial \xi^j}\right](p, 0) \\ \left[\dfrac{\partial y^{n+i}}{\partial x^i}\right](p, 0) & \left[\dfrac{\partial y^{n+i}}{\partial \xi^j}\right](p, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{bmatrix}$$

$\det J=1$，所以映射 F 在点 $(p,0)$ 非奇异.

据反函数定理，F 把 $(p,0)$ 的某个邻域 $\mathscr{U}'$ 微分同胚地映射到点 (p,p) 的某个邻域上 $(F(p,0)=(p,\exp_p(0))=(p,p))$. 再取 p 点的一个小邻域 $W\subset U$，使得 $W\times W\subset F(\mathscr{U}')$. 事实上，由引理 1 知 $\mathscr{U}'$ 可选为

$$\mathscr{U}'=\{(q,v)\in T(M)\mid q\in U'\subset U, v\in T_q(M),\ \|v\|<\varepsilon\}.$$

U' 为 q 的开邻域且使 $U'\subset U$. 至此定理 1 证毕.

取 $T_q(M)$ 的一组单位正交基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$. 我们定义映射

$$\varphi:\ T_p(M)\to \mathrm{R}^n$$
$$x^i e_i\mapsto (x^1,\cdots,x^n)$$

易见 $T_p(M)$ 与 R^n 等度同构.

定义 2 $(U_q,\psi\circ\exp_q^{-1},x^i)$ 称为 q 点的正规坐标系.

定理 2 在点 p 的正规坐标系下，有

(1) $g_{ij}(p)=\delta_{ij}$;

(2) 过 p 点的测地线方程为 $x^i=a^i t$，其中 a^i 为常数;

(3) $\Gamma_{j}{}^{i}{}_{k}(p)=0$.

证明：(1) 由于 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为 $T_p(M)$ 的单位正交基，所以 $g_{ij}(p)=\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}$.

(2) 由引理 1 即可得.

(3) 将 $x^i=a^i t$ 代入测地线方程(4.3)，得

$$\Gamma_{j}{}^{i}{}_{k}(0)a^j a^k=0.$$

由于是 Riemann 联络，$\Gamma_{j}{}^{i}{}_{k}=\Gamma_{k}{}^{i}{}_{j}$，所以有 $\Gamma_{j}{}^{i}{}_{k}=0$，$i,j,k=1,\cdots,n$. 定理证毕.

测地线是 Riemann 几何中十分重要的概念，与之密切相连的内容很多. 例如，第一及第二变分公式，共轭点，Ja-

cobi 场，指数形式以及各种比较定理等．它们构成 Riemann 几何研究的重要内容．限于篇幅，这里就不介绍了．有兴趣的读者可参阅 J. Cheeger 和 D. Ebin 的专著[84]．

最后我们简单介绍一下 Riemann 度量的完备性，以结束本节．在讨论测地线和指数映射时，我们自然会遇到测地线能否无限延伸的问题，即：对任意测地线段 γ_0: $[a,b]\to M$，是否可以将它拓广为一个测地线 γ：$\mathbb{R}\to M$，并且 $\gamma|_{[a,b]}=\gamma_0$．

定义 3 Riemann 流形 (M,g) 称为完备的，如果它的任何测地线段都可无限延伸．

在连通 Riemann 流形上，分段光滑曲线 γ：$[a,b]\to M$ 的长度

$$L(\gamma)=\int_a^b \|\gamma'(t)\|dt.$$

对于 M 上任何两点 x，y，定义它们间的距离为

$$d(x,y)=\inf_{\gamma}\{L(\gamma)\ |\ \gamma(a)=x,\gamma(b)=y\},$$

其下确界是在所有连接 x 与 y 的分段光滑曲线所成的集合上取的．可以证明① (M,d) 构成距离空间．

关于完备性有许多等价刻划，我们有下面定理．

定理 2 (Hopf–Rinow)　对于任何 Riemann 流形 M，下列各条件等价

(1) M 是完备的；

(2) 对于任何点 $p\in M$，指数映射 $\exp_p$ 定义在整个切空间 $T_p(M)$ 上；

(3) M 中任何有界闭集是紧致的；

① 见伍鸿熙等著《黎曼几何初步》，北京大学出版社，1989．

(4) M中任何两点都可以由极小测地线〔满足 $L(\gamma)=L(\gamma(a),\gamma(b))$〕的测地线〕相连；

(5) (M,d)为完备距离空间.

证明可见 D. Gromoll, W. Klingenberg 和 W. Meyer 著《Riemannsche Geometvie im Groβen》P166—P168. 限于篇幅这里就不证明这个定理了.

§1.5 曲　　率

现在我们给出 Riemann 曲率张量的一些基本事实.

定理1 对任意向量场 X, Y, Z, W, 有

(R_1) $R(X,Y)+R(Y,X)=0$;

(R_2) $R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0$;

(R_3) $\langle R(X,Y)Z,W\rangle+\langle R(X,Y)W,Z\rangle=0$;

(R_4) $\langle R(X,Y)Z,W\rangle=\langle R(Z,W)X,Y\rangle$.

证明：

(R_1)直接由定义可得.

(R_2) 只要证明等式在 M 中任一点 p 成立即可. 取 p 点附近的一局部坐标系$\{x^1, \cdots, x^n\}$. 由于 R 是 $C^\infty(M)$多线性的，我们只需考虑 $X=\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $Y=\dfrac{\partial}{\partial x^k}$, $Z=\dfrac{\partial}{\partial x^l}$的情形.

此时 $[X,Y]=[Y,Z]=[X,Z]=0$. 又因为 ∇ 为 Riemann 联络，所以

$$\nabla_XY=\nabla_YX,\quad \nabla_XZ=\nabla_ZX,\quad \nabla_ZY=\nabla_YZ.$$

于是

$$R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y$$

$$= \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) + \nabla_Y(\nabla_Z X) - \nabla_Z(\nabla_Y X) + \nabla_Z(\nabla_X Y) - \nabla_X(\nabla_Z Y) = 0.$$

(R_3) 由于(R_3)等价于$\langle R(X,Y)Z,Z\rangle = 0$,而

$$\begin{aligned}
&\langle R(X,Y)Z,Z\rangle \\
&= \langle \nabla_X\nabla_Y Z, Z\rangle - \langle \nabla_Y\nabla_X Z, Z\rangle \\
&= (X\langle \nabla_Y Z, Z\rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle) - (Y\langle \nabla_X Z, Z\rangle \\
&\quad - \langle \nabla_X Z, \Delta_Y Z\rangle) \\
&= X\langle \nabla_Y Z, Z\rangle - Y\langle \nabla_X Z, Z\rangle \\
&= \frac{1}{2}X(Y\langle Z, Z\rangle) - \frac{1}{2}Y(X\langle Z, Z\rangle) \\
&= \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle = 0.
\end{aligned}$$

(R_4) 由等式(R_2)，我们有

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle R(Y,Z)X,W\rangle + \langle R(Z,X)Y,W\rangle = 0, \tag{5.1}$$

$$\langle R(X,Y)W,Z\rangle + \langle R(Y,W)X,Z\rangle + \langle R(W,X)Y,Z\rangle = 0, \tag{5.2}$$

$$\langle R(W,Z)X,Y\rangle + \langle R(X,W)Z,Y\rangle + \langle R(Z,X)W,Y\rangle = 0, \tag{5.3}$$

$$\langle R(Z,W)Y,X\rangle + \langle R(Y,Z)W,X\rangle + \langle R(W,Y)Z,X\rangle = 0. \tag{5.4}$$

将(5.1)－(5.2)＋(5.3)＋(5.4)，然后再利用(R_1)及(R_2)得

$$2\langle R(X,Y)Z,W\rangle + 2\langle R(Z,W)Y,X\rangle = 0,$$

即
$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(Z,W)X,Y\rangle.$$

定理 1 证毕.

今后记 $R(X,Y,Z,W) = -\langle R(X,Y)Z,W\rangle$.

设$\{x^1,\cdots,x^n\}$为 M 的局部坐标，记

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\ \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^l}=R^k_{lij}\ \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

我们将度量张量 g_{ir} 与 R^r_{jkl} 加以缩约，即

$$g_{ir}R^r_{jkl}=R_{ijkl}=\left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^i}\right\rangle.$$

R_{ijkl} 为一个 4 阶协变张量，称为 Riemann 曲率张量. 于是我们可用局部观点将定理 1 重新表述如下：

定理 1′ Riemann 曲率张量有下列性质

(R_1') $R_{ijkl}=-R_{ijlk}$;

(R_2') $R_{ijkl}+R_{iljk}+R_{ijlk}=0$;

(R_3') $R_{ijkl}=-R_{jikl}$;

(R_4') $R_{ijkl}=R_{klij}$.

定义1 对 $p\in M$,在切空间 $T_p(M)$ 中任取过原点的二维平面 π，它由 X,Y 张成，则由截平面 π 决定的 Riemann 截曲率定义为

$$K(\pi)=\frac{\langle R(X,Y)Y,X\rangle}{\|X\|^2\|Y\|^2-\langle X,Y\rangle^2}.$$

可以直接证明 $K(\pi)$仅依赖于 π，而与 X,Y 的选取无关. 特别，如果取 X,Y 为张成 π 的两个单位正交向量，则

$$K(\pi)=\langle R(X,Y)Y,X\rangle.$$

又若 X_1，…，X_n 为 $T_p(M)$的一组单位正交基，有

$$K(X_i,X_j)=\langle R(X_i,X_j)X_j,X_i\rangle=R_{ijij}.$$

由截曲率还可以导出在微分几何中常用的 Ricci 曲率与纯量曲率.

对于 $p\in M$ 及固定的 $X,Y\in T_p(M)$,考虑线性变换

$$Z \mapsto R(Z,X)Y, \quad (T_p(M) \to T_p(M))$$

该线性变换的迹记为

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Tr}(Z \mapsto R(Z,X)Y).$$

它不依赖于 $T_p(M)$ 基的选取．取 $X_1,\cdots,X_n$ 为 $T_p(M)$ 的一组单位正交基，且令 $X=X_k, Y=X_l$，则有

$$\mathrm{Ric}(X_k,X_l) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(X_i,X_k),X_lX_i\rangle = \sum_i R_{ilik} = R_{kl}$$

$$= \sum_i R_{ikil} = \mathrm{Ric}(X_l,X_k) = R_{lk}.$$

$\mathrm{Ric}(X,Y)$ 称为 Ricci 曲率张量，当 $X=Y$ 为单位正交向量时称为 Ricci 曲率．它与截曲率有下面关系

$$\mathrm{Ric}(X_1,X_1) = \sum_{i=1}^{n} R_{i1i1} = \sum_{i=2}^{n} R_{i1i1}.$$

(这是因为 $R_{**11} = R_{11**} = 0$)．

上式表明：Ricci曲率 $\mathrm{Ric}(X_1,X_1)$ 为 $n-1$ 个截曲率的和．

定义 2 M 的纯量曲率定义为

$$\rho = \sum_k R_{kk} = \sum_{k,l} R_{klkl}.$$

它是 M 上的函数．

定理 2 Riemann 流形 M 在点 p 的曲率张量由在该点的所有二维切子空间的截面曲率唯一确定．

证明： 设四重线性函数 T 满足 Riemann 曲率张量所适合的所有条件，并且对任何线性无关的切向量 $X,Y \in T_p(M)$，都有

$$\frac{R(X,Y,X,Y)}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X,Y\rangle^2} = \frac{T(X,Y,X,Y)}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X,Y\rangle^2},$$

即 $$R(X,Y,X,Y)=T(X,Y,X,Y). \tag{5.5}$$
我们要证明对于任何 $X,Y,Z,W\in T_p(M)$，有
$$R(X,Y,Z,W)=T(X,Y,Z,W). \tag{5.6}$$
实际上由于$(R-T)$亦为四重线性函数且与 R 有完全相同的性质，所以要证明 $R=T$，只须证明 $T=0$ 的情形即可，即只须证明 $R=0$ 就够了．由条件(5.5)得，对于任何 Z、X、$Y\in T_p(M)$，有
$$R(X+Z,Y,X+Z,Y)=0,$$
即 $$R(X,Y,X,Y)+R(Z,Y,Z,Y)+R(X,Y,Z,Y)+R(Z,Y,X,Y)=0.$$
因此我们有
$$R(X,Y,Z,Y)=0. \tag{5.7}$$
在(5.7)式中用 $Y+W$ 代换 Y，我们有
$$R(X,Y+W,Z,Y+W)=0. \tag{5.8}$$
将(5.8)式展开并利用(5.7)式得
$$R(X,Y,Z,W)+R(X,W,Z,Y)=0. \tag{5.9}$$
即 $$R(X,Y,Z,W)=R(X,W,Y,Z). \tag{5.10}$$
于是由 Bianchi 恒等式得
$$R(X,Y,Z,W)+R(X,W,Y,Z)+R(X,Z,W,Y)=0. \tag{5.11}$$
把(5.10)代入(5.11)并利用 Riemann 曲率张量性质得
$$3R(X,Y,Z,W)=0.$$
定理证毕．

从该定理可见 Riemann 截曲率的重要性．

曲率是微分几何中重要概念，它给出了“流形弯曲”一个量度的刻划．通过对曲率的研究，特别是通过对截曲率、Ricci

曲率及纯量曲率的研究，可获得流形的拓扑与几何性质的丰富知识．有兴趣者可参见有关专著和文献．

在本节最后，我们给出所谓的 Schur 定理．

定理 3(Schur) 设在连通的 Riemann 流形 M 上的任何一点 p，其截曲率不依赖于 $T_p(M)$中过原点的二维平面，且 $\dim M = n \geq 3$，那么截曲率在整个 M 上为常数．这样的流形称为常曲率流形，也称为空间形式．

证明： 取 p 点附近的单位正交标架场 $\{X^1, \cdots, X^n\}$ 及其对偶的上标架场$\{\omega^1, \cdots, \omega^n\}$．对于任何切向量 $X = \xi^i X_i, Y = \eta^i X_i \in T_p(M)$所决定的二维平面 π，简单计算后得

$$K(\pi) = \frac{R_{ijkl}\xi^i\eta^j\xi^k\eta^l}{(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl})\xi^i\xi^j\eta^k\eta^l}, \tag{5.12}$$

其中 $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}, R_{ijkl} = \langle R(X_k, X_l)X_j, X_i \rangle$．由于 $K(\pi)$与 π 无关，为仅与 p 有关的常数，所以有

$$R_{ijkl} = K(p)(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}), \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned} \Omega^i_j &= R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l = K(p)(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl})\omega^k \wedge \omega^l \\ &= K(p)\omega^j \wedge \omega^i - K(p)\omega^i \wedge \omega^k = -2K(p)\omega^i \wedge \omega^j. \end{aligned} \tag{5.14}$$

对(5.14)式两边求外微分得

$$d\Omega^i_j = -2[dK \wedge \omega^i \wedge \omega^j + Kd\omega^i \wedge \omega^j - \omega^i \wedge d\omega^j].$$

根据结构方程有

$$\begin{aligned} d\Omega^i_j = -2[&dK \wedge \omega^i \wedge \omega^j + K\omega^l \wedge \omega^i_l \wedge \omega^j \\ &+ K\omega^i \wedge \omega^l_j \wedge \omega^l] \end{aligned} \tag{5.15}$$

另外，由第二 Bianchi 恒等式．

$$\begin{aligned} d\Omega^i_j &= \Omega^i_l \wedge \omega^l_j - \omega^i_l \wedge \Omega^l_j \\ &= -2K\omega^i \wedge \omega^l \wedge \omega^l_j + (2K)\omega^i_l \wedge \omega^l \wedge \omega^j \end{aligned}$$

$$= 2K[-\omega^i\wedge\omega^l\wedge\omega_j^l - \omega_i^l\wedge\omega^l\wedge\omega^j]. \qquad (5.16)$$

注意到 $\omega^1,\cdots,\omega^n$ 为 p 点附近的单位正交上标架场，

$$0 = \nabla_{X_k}\langle\omega^i,\omega^j\rangle = \langle\nabla_{X_k}\omega^i,\omega^j\rangle + \langle\omega^i,\nabla_{X_k}\omega^j\rangle$$

$$= \Gamma_{kj}^i + \Gamma_{ki}^j,$$

即

$$\Gamma_{kj}^i = -\Gamma_{ki}^j.$$

因此有

$$\omega_j^l = \Gamma_{sj}^l\omega^s = -\Gamma_{sl}^j\omega^s = -\omega_l^j. \qquad (5.17)$$

将(5.17)代入(5.16)式得

$$d\Omega_j^i = 2K[\omega^i\wedge\omega^l\wedge\omega_l^j + \omega_l^i\wedge\omega^l\wedge\omega^j]. \qquad (5.18)$$

联合(5.15)式与(5.18)式得

$$dK\wedge\omega^i\wedge\omega^j = 0. \qquad (5.19)$$

由于(5.19)式，所以可设

$$dK = \sum_{i=1}^n k_j\omega^j.$$

因为 $n\geqslant3$，任取三个指标 $1\leqslant i<j<k$，有

$$dK\wedge\omega^i\wedge\omega^j = dK\wedge\omega^j\wedge\omega^k = dK\wedge\omega^i\wedge\omega^k = 0,$$

因此 $K_j = 0(1\leqslant j\leqslant n)$，即 $dK = 0$. 由于 M 为流通的，所以 K 为 M 上的常数. 定理证毕.

§1.6 正规标架场

在Riemann几何研究中，尤其是在局部研究中，选取适当"好"的局部坐标系或局部标架场对于简化计算和澄清问题本质有很大的作用. 在§1.4中，我们已经介绍了正规坐标系. 在本节我们要介绍正规标架场.

定义 正交标架场 $\{X_1,\cdots,X_n\}$ 称为在 $p\in M$ 点是正规

的，若对任意 X_i, X_j，有 $\nabla_{X_i}(X_j)(p)=0$。

下面定理是说正规标架场的存在性.

定理1 设$\{e_1,\cdots,e_n\}$为$T_p(M)$的正交基，则它可以延拓成在点 p 正规的标架场.

证明： 我们要构造出正交标架场$\{V_1,\cdots,V_n\}$使得 $V_i(p)=e_i, i=1,\cdots,n$，并且在 p 点正规. 首先我们要将$\{e_1,\cdots,e_n\}$扩张成在 p 点附近正交的标架场$\{E_1,\cdots,E_n\}$，使得$E_i(p)=e_i(1\leqslant i\leqslant n)$. 我们说这是容易办到的. 比如，对于任何 $e_i(1\leqslant i\leqslant n)$，我们知道存在唯一测地线$\gamma_{e_i}(t)$，使得$\gamma_{e_i}(0)=p, \gamma'_{e_i}(0)=e_i$. 利用 e_i 测$\gamma_{e_i}(t)$平行移动即可得到 E_i.

第二步，由$\{E_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$来构造正规标架场$\{V_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$. 令

$$V_i=a_i^l E_l, \qquad i=1,2,\cdots,n. \tag{6.1}$$

我们要求矩阵$A=(a_i^l)$在 p 点附近为正交方阵并且 $A(p)=I$. 所以$\{V_1,\cdots,V_n\}$仍为 p 点附近的正交标架场，同时还满足 $V_i(p)=e_i(1\leqslant i\leqslant n)$.

欲使$\{V_1,\cdots,V_n\}$在点 p 正规，我们看 a_i^l 应满足什么方程.

$$\nabla_{V_i}V_j=\sum_l \nabla_{a_i^l E_l}\left(\sum_k a_j^k E_k\right)$$

$$=\sum_{k,l} a_i^l a_j^k \Gamma_{lk}^p E_p+\sum_{k,l} a_i^l (E_l a_j^k) E_k.$$

由于 $a_j^i(p)=\delta_j^i$，所以据上式知 $\nabla_{V_i}V_j(p)=0$ 等价于

$$\sum_{i=1}^n (E_i a_j^k+\Gamma_{ij}^k)(p)=0.$$

注意到

$$E_l\langle E_j,E_k\rangle=\langle\nabla_{E_l}E_j,E_k\rangle+\langle E_j,\nabla_{E_l}E_k\rangle$$

$$=\Gamma_{lj}^k+\Gamma_{lk}^j=0,$$

令 B_i 记常数组成的方阵$(\Gamma^k_{ij}(p))_{1\leq k,j\leq n}$，则 B_i 为反称的，即 $B_i^T=-B_i$，$i=1,\cdots,n$.

在 p 点附近取一个局部坐标系$\{x^1,\cdots,x^n\}$使之满足

$$\begin{cases} x^i(p)=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x^i}(p)=E_i(p)=e_i \end{cases} \qquad 1\leq i\leq n$$

这是容易办到的．事实上，对任一个 p 点附近的局部坐标系做一平移及一线性变换即可．令

$$A(x)=\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}B_ix^i\right). \tag{6.2}$$

由于(6.2)中级数是收敛的，故 A 是定义好的，则矩阵即为所求.

首先 $A(x)$在 p 点正交，这是因为

$AA^T=\exp(-\sum x^i(B_i+B_i^T))=e^{-0}=I$，$(B_i^T+B_i=0)$

其次　$A(p)=\exp(-\sum B_ix^i(p))=I$，　$(x^i(p))=0)$

最后，由于

$$(E_iA)\Big|_p=\frac{\partial}{\partial x^i}A\Big|_{x^i=0}=-B_i,$$

所以有

$$\sum_i(E_ia^k_j+\Gamma^k_{ij})(p)=0.$$

定理 1 所求的 $\{V_1,\cdots,V_n\}$ 可以由(6.1)式而得到，定理证毕.

若正交标架场 $\{V_1,\cdots,V_n\}$ 在 p 点正规，则其对偶的上标架场 $\{\omega^1,\cdots,\omega^n\}$ 亦在 p 点正规.

事实上，设 $\nabla_{V_i}V_j=\Gamma^k_{ij}V_k$，由 $\omega^i(V_j)=\delta^i_j$，则有

$$\nabla_{V_j}[\omega^i(V_k)] = \nabla_{V_j}\delta^i_k = 0.$$

另一方面，

$$\nabla_{V_j}[\omega^i(V_k)] = (\nabla_{V_j}\omega^i)(V_k) + \omega^i(\nabla_{V_j}V_k)$$
$$= (\nabla_{V_j}\omega^i)(V_k) + \Gamma^i_{jk},$$

所以有 $\nabla_{V_i}\omega^j = -\Gamma^j_{ik}\omega^k$. 由于 $\Gamma^k_{ij}(p)=0$，所以 $\nabla_{V_i}\omega^j(p) = 0$.

另外我们还有

$$[V_i, V_j](p) = (\nabla_{V_i}V_j - \nabla_{V_j}V_i)(p) = 0.$$

最后我们利用正规坐标系和正规标架来证明 Bianchi 恒等式

$$R^i_{jkl,s} + R^i_{jls,k} + R^i_{jsk,l} = 0. \tag{6.3}$$

证明：证明有关张量的线性等式，只须对任何固定点，取适当的局部坐标系论证即可. 设 $p\in M$，取 p 点附近的正规坐标系 $\{x^1,\cdots,x^n\}$，则$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$为在 p 点的正规标架场. $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}_1^n$的对偶上标架场为 $\{\omega^i\}_{i=1}^n$

$$\omega^i_j(p) = \Gamma^i_{kj}(p)\omega^k = 0. \tag{6.4}$$

命

$$\Omega^i_j = R^i_{jkl}\, dx^k\wedge dx^l. \tag{6.5}$$

由(2.12)式及(6.4)得

$$d\Omega^i_j(p) = 0. \tag{6.6}$$

另一方面，由于 $\{x^1,\cdots,x^n\}$ 为 p 点的正规坐标系，所以有

$$d\Omega^i_j = dR^i_{jkl}\wedge dx^k\wedge dx^l$$
$$= R^i_{jkl,s}dx^s\wedge dx^k\wedge dx^l. \quad (\text{用到 } \Gamma^i_{jk}(p)=0)$$

于是就得到

$$R^i_{jkl,s}+R^i_{jsk,l}+R^i_{jls,k}=0.$$

上式通常称为第二 Bianchi 恒等.(2.12)式也称为第二 Bianchi 恒等式，它们是不同的表述形式而已.

对于 Riemann 联络 ∇，因为 $\nabla g=0$，所以在求协变导数遇到 g_{ij} 及 g^{ik} 时，我们就可以像对待常数那样处理. 因此有

$$\begin{aligned}&(g_{ip}R^p_{jkl})_{,s}+(g_{ip}R^p_{jsk})_{,l}+(g_{ip}R^p_{jls})_{,k}\\ &=g_{ip}[R^p_{jkl,s}+R^p_{jsk,l}+R^p_{jls,k}]=0,\end{aligned}$$

即
$$R_{ijkl,s}+R_{ijsk,l}+R_{ijls,k}=0. \tag{6.7}$$

(6.7)式与(6.3)式完全等价，所以也称它为第二 Bianchi 恒等式. 作为 Bianchi 恒等式的应用，我们有下面定理.

定理 2 设 M 为 n 维连通 Riemann 流形，其 Riemann 度量张量和 Ricci 曲率张量分别为 g 和 Ric，并设 $n\geqslant 3$. 如果有 $\mathrm{Ric}=\lambda g$，其中 λ 为 M 上的光滑函数，则 λ 为常数.

证明： 对任何 $p\in M$，取 p 点附近的局部坐标系 $\{x^1,\cdots,x^n\}$. Riemann 度量张量为

$$g=g_{ij}dx^idx^j.$$

曲率张量的分量

$$R_{ijkl}=g_{ip}R^p_{jkl}.$$

我们将 $g^{ik}g^{jl}$ 乘(6.7)式两边得

$$(g^{ik}g^{jl}R_{ijkl})_{,s}+(g^{ik}g^{jl}R_{ijsk})_{,l}+(g^{ik}g^{jl}R_{ijls})_{,k}=0. \tag{6.8}$$

又因为 $R_{ijkl}=-R_{jikl}=-R_{ijlk}$ 及 $g^{ik}R_{ijkl}=R_{jl}$ 为 Ricci 曲率张量的分量，据假设有 $R_{jl}=\lambda g_{jl}$. 因此有

$$(\lambda g^{jl}g_{jl})_{,s}-(\lambda g_{js}g^{jl})_{,l}-(\lambda g_{is}g^{ik})_{,k}=0. \tag{6.9}$$

即
$$n\lambda_{,s}-(\lambda\delta_{sl})_{,l}-(\lambda\delta_{sk})_{,k}=0.$$

所以得

$$(n-2)\lambda_{,s}=0. \tag{6.10}$$

由于 M 连通及 $n\geqslant 3$，所以 λ 在整个流形上为常数. 定理证毕.

我们把满足条件 $\mathrm{Ric}=\lambda g$（λ 为常数）的 Riemann 流形称为 Einstein 流形.

§1.7 Weitzenböck 公式

在本节中，我们要介绍 Laplace 算子和 Weitzenböck 公式. 它们在整体 Riemann 几何和大范围分析的研究中起着重要作用.

对任何 $p\in M$，在 p 点附近的局部坐标系 $\{x^1, \cdots, x^n\}$ 下，切空间 $T_p(M)$ 连同度量

$$g_{ij}=\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle \tag{7.1}$$

成为欧氏空间.

$T_p(M)$ 的对偶空间 $T_p^*(M)$ 由 $\{dx^1, \cdots, dx^n\}$ 张成，其度量为

$$g^{ij}=\langle dx^i, dx^j\rangle. \tag{7.2}$$

这里 $g^{ik}g_{kj}=\delta^i_j$，即 (g^{jk}) 为 (g_{ij}) 的逆矩阵.

利用内积 (7.2)，我们可把它诱导到 $\Lambda_p^r(M)=\Lambda^r T_p^*(M)$ ——p 点所有 r 次外微分形式所成的空间.

设

$$\alpha=\frac{1}{r!}\sum \alpha_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r} \quad \in \Lambda_p^r(M),$$

$$\beta=\frac{1}{r!}\sum \beta_{j_1\cdots j_r}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_r}\in \Lambda_p^r(M),$$

则我们定义 α 与 β 在 p 点的内积为

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{1}{r!}\sum \alpha_{i_1\cdots i_r} g^{i_1 j_1}\cdots g^{i_r j_r}\beta_{j_1\cdots j_r}$$

$$= \frac{1}{r!}\alpha_{i_1\cdots i_r}\beta^{i_1\cdots i_r}, \tag{7.3}$$

其中 $\beta^{i_1\cdots i_r} = g^{i_1 j_1}\cdots g^{i_r j_r}\beta_{j_1\cdots j_r}$.

可以看出：(7.3)式不依赖于局部坐标的选取.

当点 p 在 M 上变动时，(7.3) 给出了 $\Lambda^r(M)$ 上一个度量，该度量光滑.

以后我们假定 M 为可定向 Riemann 流形. 取 M 的一个局部坐标，则 $dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ 给出 M 一个定向. 记 $G=\det(g_{ij})$，则$\sqrt{G}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ 不依赖于局部坐标系的选取. (要证明它只须做变数变换即可)，因而它在 M 上是整体定义好的. 我们把它称为体积形式，或体积元素，记为 dM.

下面我们给出 Hodge 对偶算子*的定义.

定义 1 Hodge 对偶算子*为一线性算子

$$*:\ \Lambda^p(M)\to\Lambda^{n-p}(M),$$

且满足 $\langle\alpha, \beta\rangle dM = \alpha\wedge*\beta, \quad \alpha, \beta\in\Lambda^p(M). \quad (7.4)$

*算子有如下简单性质

(1) $*1 = dM = \sqrt{G}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$;

(2) $**\alpha = (-1)^{np+p}\alpha, \quad \alpha\in\Lambda^p(M)$;

(3) $\alpha\wedge*\beta = \beta\wedge*\alpha, \quad \alpha, \beta\in\Lambda^p(M)$.

上面三个性质都不难直接证明.

由于 * 算子的定义完全是局部的，下面我们就给出其局部表示. 在局部坐标系$\{x^1, \cdots, x^n\}$中，设α, $\beta\in\Lambda^p(M)$,

$$\alpha = \frac{1}{p!}\alpha_{i_1\cdots i_p}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p},$$

$$\beta = \frac{1}{p!}\beta_{j_1\cdots j_p}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_p}.$$

据(7.4)式,

$$(\beta, \alpha) = \frac{1}{p!}\ \beta_{i_1\cdots i_p}\alpha^{i_1\cdots i_p}\ \sqrt{G}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$= \beta\wedge *\alpha = \frac{1}{p!}\beta_{i_1\cdots i_p}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\wedge *\alpha.$$

我们得

$$*\alpha = \frac{1}{p!(n-p)!}\sqrt{G}\ \delta^{1\cdots\cdots n}_{j_1\cdots j_p k_1\cdots k_{n-p}}$$

$$\alpha^{j_1\cdots j_p}dx^{k_1}\wedge\cdots\wedge dx^{k_{n-p}}, \tag{7.5}$$

其中

$$\delta^{1\cdots n}_{a_1\cdots a_n} = \det\begin{pmatrix}\delta^1_{a_1}\cdots\delta^n_{a_1}\\ \cdots\cdots \\ \delta^1_{a_n}\cdots\delta^n_{a_n}\end{pmatrix}.$$

下面我们给出 $\Lambda^p(M)$上的整体内积(,),使得 $\Lambda^p(M)$成为一个内积空间.

定义2 对于任何α, $\beta\in\Lambda^p(M)$, α和β的整体内积定义为

$$(\alpha, \beta) = \int_M \langle\alpha, \beta\rangle\ dM = \int_M \alpha\wedge *\beta\ . \tag{7.6}$$

注意上面定义要求积分(7.6)存在. 因此我们要求要么M紧致, 要么α或β具有紧支集.

容易验证内积(,)满足内积公理.

有了内积(,), 我们便可以定义外微分算子d的共轭算子δ, 即

$$(d\alpha,\beta)=(\alpha,\delta\beta),\qquad \alpha\in\Lambda^p(M),\ \beta\in\Lambda^{p+1}(M).$$

显然 $\delta:\ \Lambda^{p+1}(M)\to\Lambda^p(M).$

引理1 对任何 $\alpha\in\Lambda^{p+1}(M)$，若 M 紧致或 α 有紧支集，则有

$$\delta\alpha=(-1)^{np+1}*d*\alpha. \tag{7.7}$$

证明： 对任何 $\beta\in\Lambda^p(M)$，由 Stokes 定理

$$0=\int_M d(\beta\wedge*\alpha)=\int_M d\beta\wedge*\alpha+\int_M(-1)^p\beta\wedge d*\alpha.$$

把上式改写为

$$\begin{aligned}(d\beta,\alpha)&=\int_M d\beta\wedge*\alpha=(-1)^{p-1}\int_M\beta\wedge d*\alpha\\&=(-1)^{p-1}(-1)^{(n+1)(n-1)}\int_M\beta\wedge**d*\alpha\\&=(-1)^{np+1}\int_M\beta\wedge*(*d*\alpha)=(\beta,\ \delta\alpha),\end{aligned}$$

所以有 $\delta\alpha=(-1)^{np+1}*d*\alpha.$

引理 1 证毕.

定义3 Hodge-Laplace 算子Δ定义为$\Delta=d\delta+\delta d$.

如果 $\alpha\in\Lambda^p(M)$ 满足 $\Delta\alpha=0$，那么我们把 α 称为调和形式. M 上的所有 p 阶调和形式全体构成一个向量空间，记为$H_p(M)$.

反映流形拓扑性质的重要概念之一是所谓的上同调群 $H^p(M,\ R)$，Hodge 定理说 $H^p(M,\ R)$与 $H_p(M)$ 同构，我们引述 Hodge 定理如下.

Hogde**定理** 设M为紧可定向 Riemann 流形，则有

(1) $H_p(M)$为有限维向量空间；

(2) $H_p(M)$同构于 p 阶上同调向量空间$H^p(M,\ R)$.

(3) $\Lambda^p(M)=d\Lambda^{p-1}(M)\ominus H^p(M)\oplus\delta\Lambda^{p+1}(M)$.

Hodge 定理是关于 Riemann 流形的基本定理之一，此处不准备讨论其证明，可参见[69].

定义4 对 $X\in\mathscr{D}(M)$，我们定义内乘积 $I(X)$ 为

$$I(X):\ \Lambda^p(M)\longrightarrow\Lambda^{p-1}(M)$$

$$\alpha\mapsto I(X)\alpha,$$

$$I(X)\alpha(X_1,\ \cdots,\ X_{p-1})=\alpha(X,\ X_1,\ \cdots,\ X_n).$$

其中 $X_1,\ \cdots,\ X_{p-1}\in\mathscr{D}(M)$.

我们任取一组标架场 $\{X_1,\ \cdots,\ X_n\}$ 及其对偶上标架场 $\{\omega^1,\ \cdots,\ \omega^n\}$，我们有如下定理

定理1

$$d=\sum_{i=1}^n\omega^i\wedge\nabla_{X_i},\tag{7.8}$$

$$\delta=-\sum_{j=1}^n I(X_j)\nabla_{X_j}.\tag{7.9}$$

证明：首先我们要说明(7.8)式及(7.9)式与标架场的选取无关. 取另一组标架场$\{Y_1,\ \cdots,\ Y_n\}$及其对偶的上标架场$\{\varphi^1,\ \cdots,\ \varphi^n\}$，令

$$Y_i=a_i^jX_j,\qquad \varphi^i=b_j^i\omega^j,$$

$$\varphi^l(Y_i)=b_k^l\omega^k(a_i^jX_j)=b_k^la_i^k=\delta_i^l.$$

于是

$$\sum_i\varphi^i\wedge\nabla_{Y_i}=\sum_i\sum_{j,k}b_k^i\omega^k\wedge\nabla_{a_i^jX_j}$$

$$=\sum_{j,k}\left(\sum_i b_k^ia_i^j\right)\omega^k\wedge\nabla_{X_j}$$

$$= \sum_k \omega^k \wedge \nabla_{X_k}.$$

同法可验(7.9)式与标架场的选取无关．另外由于线性，所以关于 (7.8) 和 (7.9) 式只需对单项式 $f\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^p$ 证明即可．

为证明(7.8)式，我们取所讨论点的正规坐标 $\{x^1, \cdots, x^n\}$．命 $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$，$\omega^i = dx^i$，$i = 1, \cdots, n$．

在所讨论点有

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \omega^i = 0.$$

所以在所讨论点有

$$\sum_i \omega^i \wedge \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} (f\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^p) = \sum_i \omega^i \wedge \frac{\partial f}{\partial x^i}\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^p$$

$$= df\wedge\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^p = d(f\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^p).$$

这样就证明了(7.8)式．

为证明(7.9)式，取所讨论点的正规标架场 $\{X_1, \cdots, X_n\}$ 及其对偶上标架场$\{\omega^1, \cdots, \omega^n\}$．在所讨论点有 $\nabla_{X_i}\omega^j = 0$，及

$$-\sum_j I(X_j)\nabla_{X_j}(f\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^p)$$

$$= -\sum_j I(X_j)(X_j f)(\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^p)$$

$$= -\sum_j (X_j f) I(X_j)(\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^p)$$

$$= -\sum_j (X_j f) \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \omega^k (X_j) \omega^1 \wedge \cdots$$

$$\wedge \hat{\omega}^k \wedge \cdots \wedge \omega^p$$

$$= \sum_j (-1)^j (X_j f) \omega^1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}^j \wedge \cdots \wedge \omega^p, \tag{7.10}$$

其中“$\wedge$”表示去掉该项.

另一方面，有

$$\delta(f\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^p)$$
$$= (-1)^{n(p-1)+1} * d * (f\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^p)$$
$$= (-1)^{np+n+1} * d * (f\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^p)$$
$$= (-1)^{np+n+1} * d[f\omega^{p+1} \wedge \cdots \wedge \omega^n]$$
$$= (-1)^{np+n+1} * \left[\sum_i \omega^i \wedge \nabla_{X_i}(f\omega^{p+1} \wedge \cdots \wedge \omega^n)\right]$$
$$= (-1)^{np+n+1} * \left[\sum (X_i f)\omega^i \wedge \omega^{p+1} \wedge \cdots \wedge \omega^n\right]$$
$$= (-1)^{np+n+1} \sum_i (-1)^{(p-1)(n-p+1)+p-i}$$
$$\times (X_i f)\omega^1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}^i \wedge \cdots \wedge \omega^n$$
$$= \sum (-1)^i (X_i f)\omega^1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}^i \wedge \cdots \wedge \omega^n.$$

上面倒数第二个等式中用到等式

$$*[\omega^j \wedge \omega^{p+1} \wedge \cdots \wedge \omega^n]$$
$$= (-1)^{(p-1)(n-p+1)+p-j} \omega^1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}^j \wedge \cdots \wedge \omega^n.$$

而且所有 * 算子均是关于定向 $\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n$的. 至此(7.9)式证明. 故定理1证毕.

下面我们给出 Weitzenböck 公式，即

定理2 设 $p\in M$，取在 p 附近的正规标架场$\{X_1,\cdots,X_n\}$及其对偶上标架场$\{\omega^1,\cdots,\omega^n\}$. 对于任意 $\alpha\in A^p(M)$，有下列公式成立

$$\Delta\alpha=-\sum_{i=1}^{n}\nabla^2{}_{X_iX_i}\alpha-\sum_{i,j}\omega^i\wedge I(X_j)R(X_i,X_j)\alpha. \tag{7.11}$$

(7.11)式通常叫做 Weitzenböck 公式，其中 $\nabla^2{}_{X_iX_j}=\nabla_{X_i}\nabla_{X_j}$.

证明： 由公式

$$d=\sum\omega^i\wedge\nabla_{X_i},\qquad \delta=-\sum I(X_j)\nabla_{X_j}$$

及 $$I(X_j)\nabla_{X_k}=\nabla_{X_k}I(X_j)$$

得
$$\begin{aligned}d\delta&=-\sum_{i,j}\omega^i\wedge\nabla_{X_i}[I(X_j)\nabla_{X_j}]\\&=-\sum_{i,j}\omega^i\wedge I(X_j)\nabla_{X_i}\nabla_{X_j}.\end{aligned}\tag{7.12}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\delta d&=-\sum_j I(X_j)\nabla_{X_j}(\sum_i\omega^i\wedge\nabla_{X_i})\\&=-\sum_{i,j}I(X_j)[(\nabla_{X_j}\omega^i\wedge\nabla_{X_i}+\omega^i\wedge\nabla_{X_j}\nabla_{X_i}]\\&=-\sum_{i,j}I(X_j)[\omega^i\wedge\nabla_{X_j}\nabla_{X_i}]\\&=-\sum_i\nabla^2{}_{X_iX_i}+\sum_{i,j}\omega^i\wedge I(X_j)\nabla_{X_i}\nabla_{X_j}.\end{aligned}\tag{7.13}$$

(因为 $I(X_j)[\omega^i\wedge\nabla_{X_j}\nabla_{X_i}\alpha]$

$=I(X_j)\omega^i\wedge\nabla_{X_j}\nabla_{X_i}\alpha+(-1)^{\deg(\omega^i)}\omega^i\wedge I(X_j)\nabla_{X_j}\nabla_{X_i}\alpha$)

由(7.12)及(7.13)即得 Weitzenböck 公式(7.11). 证毕.

做点态内积后得

$$\langle \Delta\alpha, \alpha\rangle = -\left\langle \sum_i \nabla^2_{X_iX_i}\alpha, \alpha \right\rangle - F(\alpha). \tag{7.14}$$

其中 $$F(\alpha) = \left\langle \alpha, \sum_{i,j}\omega^i \wedge I(X_j)R(X_i,X_j)\alpha \right\rangle.$$

由于 $$\delta = -\sum I(X_i)\nabla_{X_i},$$

我们有

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \nabla^2_{X_iX_i}\alpha, \alpha \right\rangle = -\delta\langle \nabla\alpha, \alpha\rangle - \sum_i |\nabla_{X_i}\alpha|^2. \tag{7.15}$$

若 M 为紧致无边流形，或 α 具有紧支集，把 (7.15) 式代入 (7.14)式后，两边在 M 上积分得

$$(\Delta\alpha, \alpha) = \sum_i (\nabla_{X_i}\alpha, \nabla_{X_i}\alpha) - \left(\alpha, \sum_{i,j}\omega^i \wedge I(X_j)R(X_i,X_j)\alpha\right). \tag{7.16}$$

Weitzenböck 公式与 Bochner 技巧结合结来在微分几何研究中取得了丰富结果，详细内容可参见[65]。

第二章 Kähler 流形基础

本章主要介绍 Kähler 流形上的几何与分析基础. 我们将分别用两种不同的观点，即 Riemann 几何观点与 Hermite 几何观点，讨论 Kähler 流形的几何性质. 最后我们基本上利用局部观点讨论 Kähler 流形上的分析，得到 Neuman 算子的局部表达式. 这个公式在今后几章中要常用到.

为此，我们首先介绍复流形、复向量丛等复几何中的基本概念.

§2.1 复 流 形

设 C 表示复数域，$\mathbf{C}^n = \overbrace{\mathbf{C}^1 \times \mathbf{C}^1 \times \cdots \times \mathbf{C}^1}^{n}$ 为 n 维复线性空间.

定义 1 设 M 为具有可数基的 Hausdorff 空间，M 具有一组开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$，其中任意一个开集 U_α 都与 $\mathbf{C}^n$ 中某一开集同胚，记该同胚为

$$\varphi_\alpha: \ U_\alpha \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbf{C}^n.$$

它还满足下面条件：对任何$U_\alpha, U_\beta (\alpha, \beta \in I)$，若$U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$，则

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \ \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

为 $\mathbf{C}^n$ 中开子集间的全纯映射.

注：据 Dieudonne 定理，M 必为仿紧空间. 我们把$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$称为 M 的一个复局部系. 把 $\varphi_\alpha=(z^1, \cdots, z^n)$ 称为复局部坐标.

复流形的例子很多，我们这里仅举几个简单例子.

例 1 C^n 是 n 维复流形，它的任何开子集也是复流形.

例 2 Riemann 面为一维复流形.

例 3 复射影空间 CP^n 是 n 维复流形.

事实上，$CP^n=(\mathrm{C}^{n+1}-\{0\})/\sim$，其中关系"$\sim$"如下定义：

$$(z^1, \cdots, z^{n+1})\sim(w^1, \cdots, w^{n+1})$$

当且仅当有非零复数 λ，使得

$$(z^1, \cdots, z^{n+1})=\lambda(w^1, \cdots, w^n). \tag{1.1}$$

显然关系"$\sim$"是一个等价关系. $(\mathrm{C}^{n+1}-\{0\})/\sim$中元素记为$[z^1, \cdots, z^{n+1}]$. $[z^1, \cdots, z^{n+1}]$称为 CP^n 中的点的齐次坐标.

取 $U_i=\{[z^1, \cdots, z^{n+1}] \mid z_i\neq 0\}$，则 U_i 为 CP^n 的一个局部坐标邻域，CP^n 由 $n+1$ 个坐标邻域 $U_i(1\leqslant i\leqslant n+1)$ 覆盖.

在 U_i 内，

$$[z^1, \cdots, z^{n+1}]=z^i\left[\frac{z^1}{z^i}, \cdots, \frac{z^{i-1}}{z^i}, 1, \frac{z^{i+1}}{z^i}, \cdots, \frac{z^{n+1}}{z^i}\right]$$

$$=z^i[\xi^1, \cdots, \xi^{i-1}, \xi^{i+1}, \cdots, \xi^{n+1}],$$

其中 $\xi^j=z^j/z^i$，$1\leqslant j\leqslant n+1$，$j\neq i$.

我们用$(\xi^1, \cdots, \hat{\xi}^i, \cdots, \xi^{n+1})$表示 U_i 的局部坐标，而任何 U_i 都与 C^n 同胚. 设 U_j 的局部坐标为 $\eta^1, \cdots, \hat{\eta}^j, \cdots, \eta^{n+1}(i\neq j)$，当 $U_i\cap U_j\neq\varnothing$ 时，我们有

$$\begin{cases}\eta^k=\xi^k/\xi^j, & k\neq i,\ j\\ \eta^i=1/\xi^j, & k=i\end{cases}$$

它们均为全纯的．所以我们给出了 CP^n 的复结构．CP^n 为 n 维复流形．

注：可以看出 CP^n 即为 C^{n+1} 中的所有过原点的复直线全体组成的空间．

n 维复流形 M 可自然地视为 $2n$ 维实微分流形．设 $\{z^1,\cdots z^n\}$ 为点 p 的复局部坐标系，记 $z^j=x^j+\sqrt{-1}\,y^j$，$1\leqslant j\leqslant n$，则 $\{x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n\}$ 为作为实流形 M 的局部坐标系．所以 $\dfrac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x^n}$，$\dfrac{\partial}{\partial y^1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial y^n}$ 构成 M 在点 p 的（实）切空间 $T_p(M)$ 的基底．我们定义一个线性算子 J：

$$J:\ T_p(M)\longrightarrow T_p(M)$$

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial}{\partial y^i},\quad J\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)=-\frac{\partial}{\partial x^i},\qquad 1\leqslant i\leqslant n.$$

易见算子 J 为 $T_p(M)$ 的自同构，并且 $J^2=Id$．

我们把切空间 $T_p(M)$ （$p\in M$）的复化定义为

$$T_p{}^C(M)=C\otimes T_p(M).$$

依线性方式把 J 扩充到 $T_p{}^CM$ 上去，仍记为 J，即

$$J(V+\sqrt{-1}\,W)=JV+\sqrt{-1}\,JW,\ V,\ W\in T_p(M).$$

在 $T_p^C(M)$ 中定义共轭运算"$-$"：

$$\text{“}-\text{”}:\ T_p^C(M)\longrightarrow T_p^C(M)$$

$$(V+\sqrt{-1}\,W)\mapsto\overline{(V+\sqrt{-1}\,W)}$$

$$=V-\sqrt{-1}\,W,\ V,\ W\in T_p(M).$$

在共轭运算下，J 为实算子，即

$$\overline{JX} = J(\overline{X}), \qquad X \in T_p^{\mathbf{C}}(M).$$

线性算子 J 在复线性空间 $T_p^{\mathbf{C}}(M)$ 上仍为自同构，且 $J^2 = Id$. 所以其特征值为$\sqrt{-1}$ 和 $-\sqrt{-1}$. 因此我们就把 $T_p^{\mathbf{C}}(M)$ 分解成 J 的特征子空间的直和：

$$T_p^{\mathbf{C}}(M) = T_p^{1,0}(M) \otimes T_p^{0,1}(M),$$

其中 $T_p^{1,0}(M) = \{V \mid JV = \sqrt{-1}\,V,\ V \in T_p^{\mathbf{C}}(M)\}$

$$T_p^{0,1}(M) = \{W \mid JW = -\sqrt{-1}\,W,\ W \in T_p^{\mathbf{C}}(M)\}.$$

$T_p^{1,0}(M)$ 中元素称为 (1, 0) 型切向量， $T_p^{0,1}(M)$ 中元素称为 (0, 1)型切向量. 显然有 $T_p^{0,1}(M) = \overline{T_p^{1,0}}(M)$.

在复局部坐标系$\{z^1, \cdots, z^n\}$中，我们有

$$T_p^{1,0}(M) = \mathrm{span}_{\mathbf{C}}\left\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z^n}\right\},$$

$$T_p^{0,1}(M) = \mathrm{span}_{\mathbf{C}}\left\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}\right\}.$$

事实上，显然有

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^i}\right) \in T_p^{1,0}(M).$$

反之设 $V = \alpha + \sqrt{-1}\,\beta \in T_p^{1,0}(M)$， α， $\beta \in T_p(M)$，则有

$$\begin{aligned} JV &= J\alpha + \sqrt{-1}\,J\beta = \sqrt{-1}\,(\alpha + \sqrt{-1}\,\beta) \\ &= \sqrt{-1}\,\alpha - \beta, \end{aligned}$$

即 $\alpha = J\beta$，$\beta = -J\alpha$，$V = \alpha - \sqrt{-1}\,J\alpha$. 令

$$\alpha = \sum_i\left(a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + b^i \frac{\partial}{\partial y^i}\right),$$

则 $V = \alpha - \sqrt{-1}\,J\alpha$

$$
=\sum_i a^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}-\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^i}\right)
$$

$$
+\sum_i b^i\left(\frac{\partial}{\partial y^i}+\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)
$$

$$
=\sum_i a^i\frac{\partial}{\partial z^i}+\sum_i b^i\sqrt{-1}\cdot\frac{\partial}{\partial z^i}.
$$

所以有

$$
T_p^{1,0}(M)=\mathrm{span}_{\mathrm{C}}\left\{\frac{\partial}{\partial z^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial z^n}\right\}.
$$

同法可得

$$
T_p^{0,1}(M)=\mathrm{span}_{\mathrm{C}}\left\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}\right\}.
$$

§2.2 复向量丛的联络和曲率

本节我们介绍复流形上的复向量丛、全纯向量丛等概念，并讨论它们的联络和曲率。如果不特别说明，M始终假定为 n 维复流形。

定义 1 Hausdorff 拓扑空间 E 称为 M 上的秩为 r 的复向量丛，若存在连续映射(投射)π: $E\to M$，满足下面三个条件：

(1) 对任何点 $p\in M, E_p=\pi^{-1}(p)$是 r 维复向量空间，即 $E_p\simeq \mathrm{C}^r$. E_p 称为 E 在 p 点的纤维.

(2) 对任何点 $p\in M$，存在 p 的一个领域 U，使得 U 上的所有纤维 $E^{-1}(U)$与 $U\times\mathrm{C}^r$ 同胚，即存在同胚映射 φ_U:

$$
\varphi_U:\ U\times\mathrm{C}^r\longrightarrow\pi^{-1}(U) \tag{2.1}
$$

满足

$$\pi\circ\varphi_U(x,\ \xi)=x,\qquad x\in U,\ \xi\in \mathrm{C}^r. \tag{2.2}$$

邻域 U 及同胚映射 φ_U 合起来称为 E 的局部平凡化邻域。

(3) 对于两个局部平凡化邻域 U，V，$U\cap V\neq\varnothing$，存在一个 C^∞ 映射 g_{UV}：$U\cap V\longrightarrow \mathrm{GL}(r,\ \mathrm{C})$，使得

$$\varphi_U(p,\ \xi_U)=\varphi_V(p,\ \xi_V)\Longleftrightarrow\xi_V=\xi_U\cdot g_{UV}(p),$$
$$p\in U\cap V. \tag{2.3}$$

并满足相容性条件

$$\begin{cases}g_{UV}=g_{VU}^{-1}\\ g_{UV}\cdot g_{VW}\cdot g_{WU}=1\end{cases}\qquad (U\cap V\cap W\neq\varnothing) \tag{2.4}$$

其中 g_{UV} 称为连接函数，g_{UV} 可视为非奇异的 $r\times r$ 复矩阵.

向量丛 $E\xrightarrow{\pi}M$ 常记作三元组$(E,\ \pi,\ M)$，其中 E 称为丛空间，π 称为丛投射，M 称为底空间（或底流形），C^r 是纤维型.

在向量丛的定义中，最根本的是连接函数. 事实上，只要给一组局部平凡化邻域及满足相容性条件(2.4)的一组连接函数，我们就可以将同一纤维中的向量在不同的局部平凡化邻域中按(2.3)方式等同起来从而得一个向量丛.

在定义 1 中，如果我们要求连接函数 g_{UV} 是复全纯函数，则就得到全纯向量丛的定义.

例 1 复流形 M 的全纯切丛 $T^{1,0}(M)$.

M 是一个 n 维复流形，$p\in M$. 取 p 点附近的两个坐标邻域 U_α，U_β. 设 U_α 的复坐标为$\{z^1,\ \cdots,\ z^n\}$，U_β 的复局部坐标为$\{w^1,\ \cdots,\ w^n\}$. 令

$$E_p=\left\{\sum_{i=1}^{n} a^i\frac{\partial}{\partial z^i}\ \middle|\ a^i\in\mathrm{C}\right\},$$

又令连接函数

$$g_{\alpha\beta}:\ U_\alpha\cap U_\beta\longrightarrow \mathrm{GL}(n,\ \mathrm{C})$$
$$p\longmapsto g_{\alpha\beta}(p)$$

其中

$$g_{\alpha\beta}(p)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial z^1}{\partial w^1}\cdots\dfrac{\partial z^1}{\partial w^n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial z^n}{\partial w^1}\cdots\dfrac{\partial z^n}{\partial w^n}\end{vmatrix}$$

是全纯函数.

于是就得到一个全纯向量丛，记为 $T^{1,0}(M)$. 我们称之为 M 的全纯切丛.

例 2 全纯余切丛 $(T^{1,0})^*(M)$（即 $T^{1,0}(M)$ 的对偶丛）.

设 M 为一复流形，$\{U_\alpha\}$ 是 M 的一组局部坐标邻域，且 $M=\bigcup_\alpha U_\alpha$. 设 U_α 的复局部坐标为 $\{z^1,\ \cdots,\ z^n\}$，U_β 的复局部坐标为 $\{w^1,\ \cdots,\ w^n\}$，$p\in U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$，取纤维 E_p 为

$$E_p=(T_p^{1,0})^*(M)=\{a_i dz^i\}=\mathrm{span}_{\mathrm{C}}\{dz^1,\ \cdots,\ dz^n\}.$$

连接函数为

$$g_{\alpha\beta}(p)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial w^1}{\partial z^1}\cdots\dfrac{\partial w^n}{\partial z^1}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial w^1}{\partial z^n}\cdots\dfrac{\partial w^n}{\partial z^n}\end{vmatrix},$$

它是全纯函数.

例 3 复向量丛 E 与 F 的张量积 $E\otimes F$.

设 E，F 均为 M 上的复向量丛. E 和 F 的连接函数分别为 g_{UV} 和 f_{UV}. 令

$$(E\otimes F)_p = E_p\otimes F_p, \qquad p\in M.$$

$E\otimes F$ 的连接函数 h_{UV} 为

$$h_{UV} = g_{UV}\otimes f_{UV},$$

它在 $E\otimes F$ 的作用为

$$(e\otimes f)h_{UV} = (e\cdot g_{UV})\otimes(f\cdot f_{UV}), \qquad e\in E,\ f\in F.$$

显然 h_{UV} 适合连接函数的相容性条件. M 上的以 h_{UV} 为连接函数的复向量丛称为 E 与 F 的张量积，记为 $E\otimes F$.

我们也可以定义 E 与 F 的外积丛 $E\wedge F$.

定义 2 设 $E\xrightarrow{\pi}M$ 是秩为 r 的复向量丛，U 为 M 的开子集. 映射 $S: U\to E$ 称为复向量丛 E 在 U 上的截面(section)，如果

$$\pi\circ S(p) = p, \qquad p\in M. \tag{2.5}$$

如果 U_i 为 M 的一组局部平凡化邻域，那么 $S|_{U\cap U_i}$ 可表为

$$(p,\ S^1(p),\ \cdots,\ S^r(p))\in U_i\times \mathbf{C}^r. \tag{2.6}$$

如果 $S^j(p)(j=1,\ \cdots,\ r)$对 p 全纯，则称 S 为全纯截面. 如果对 p 是 C^∞ 的，则称 S 为光滑截面. 今后若非特别注明，所有截面都理解为光滑截面.

将 U 中全体 E 值截面记为 $\Gamma(U,\ E)$，当不强调截面的定义域是整个流形或某个 M 中开集时，简记为 $\Gamma(E)$.

我们把一组 r 个截面 $(S_1,\ \cdots,\ S_r)$ 称为其定义域上的一组标架场，如果对于定义域中任何点 p，$S_1(p)$，$\cdots$，$S_r(p)$ 都构成纤维 E_p 的一组基.

取定一组标架场 $S_1, \cdots, S_r$. 记 $S=(S_1, \cdots, S_r)^T$. 那么对于任何截面 $\xi\in\Gamma(E)$都可以相对于 S 表示为

$$\xi=\xi^j S_j=(\xi^1, \cdots, \xi^r)S. \tag{2.7}$$

如果 $S'=(S'_1, \cdots, S'_r)^T$ 为另一局部标架场，设

$$S'=AS, \quad A\in \mathrm{GL}(r, \mathbf{C}), \tag{2.8}$$

由于

$$\begin{aligned}\xi&=(\xi^1, \cdots, \xi^r)S=(\xi^{1\prime}, \cdots, \xi^{r\prime})S'\\&=(\xi^{1\prime}, \cdots, \xi^{r\prime})AS,\end{aligned}$$

所以有

$$(\xi^{1\prime}, \cdots, \xi^{r\prime})=(\xi^1, \cdots, \xi^r)A, \tag{2.9}$$

其中 $\xi=(\xi^{1\prime}, \cdots, \xi^{r\prime})S^1$.

设 $E\xrightarrow{\pi}M$是秩为 r 的复向量丛. 对于 M 中开集U，我们用 $\Gamma(U, \Lambda^p M\otimes E)$ 记向量丛 $\Lambda^p M\otimes E$ 在 U 上的截面所成的集合. $\Gamma(U, \Lambda^p M\otimes E)$ 中元素称为 E 值 p 阶外微分式. 局部地，可表示为

$$\zeta=\zeta_{i_1\cdots i_p}(x)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p} \tag{2.10}$$

$$x\mapsto\zeta_{i_1\cdots i_p}(x)\in E_x, \qquad x\in M.$$

换言之，$\Gamma(U, \Lambda^p M\otimes E)$中元素可以看作一个 r 阶向量，其分量是 p 阶微分式.

定义 3 设$E\xrightarrow{\pi}M$ 为一复向量丛，其秩为 r. E 的一个联络 D 是一个算子

$$D: \ \Gamma(E)\to\Gamma(T^*\otimes E),$$

满足

(D₁) $D(S_1+S_2)=DS_1+DS_2, \qquad S_1, S_2\in\Gamma(E)$.

(D₂) $D(fS)=df\otimes S+fS, \qquad S\in\Gamma(E), \ f\in C^\infty(M)$.

由于任一截面均可以由标架场线性表示，因此要确定 D，

只需对一组标架 $S=(S_1, \cdots, S_r)^T$，给出 DS 即可．令

$$DS_i=\omega_i^j\otimes S_j, \qquad \omega_i^j\in\Gamma(T^*) \tag{2.11}$$

$$\omega=(\omega^i_j)_{1\leqslant i,j\leqslant r}. \tag{2.12}$$

我们把(2.11)式重写为

$$DS=\omega\otimes S, \tag{2.13}$$

其中方阵 ω 称为联络方阵，它依赖于局部标架场 S.

如果 $\xi=\xi^i\cdot S_i$，则有

$$D\xi=(d\xi^i+\xi^j\omega^i_j)S_i.$$

取 $S'=(S'_1, \cdots, S'_r)^T$ 为另一局部标架场，ω' 为联络 D 相对于 S' 的联络方阵．设

$$S'=AS, \qquad A\in \mathrm{GL}(r, \mathrm{C}).$$

利用联络条件(D_1)及(D_2)得到

$$\begin{aligned}DS'&=D(AS)=dA\otimes S+A\cdot DS\\&=dA\cdot A^{-1}\otimes S'+A\omega\otimes S\\&=(dA\cdot A^{-1}+A\cdot\omega\cdot A^{-1})\otimes S'.\end{aligned} \tag{2.14}$$

所以
$$\omega'=dA\cdot A^{-1}+A\cdot\omega\cdot A^{-1}. \tag{2.15}$$

这就是联络方阵在局部标架场改变时的变换公式．

我们再将联络 D 推广到 $\Gamma(\Lambda^pM\otimes E)\to\Gamma(\Lambda^{p+1}M\otimes E)$. 它是定义 3 的拓广．

设 $\xi=\xi^i\otimes S_i$，$\xi^i\in\Gamma(\Lambda^pM)$，$S\in\Gamma(E)$．定义 D 如下：

$$\begin{aligned}D\xi&=d\xi^i\otimes S_i+(-1)^p\xi^j\wedge DS_j\\&=(d\xi^i+(-1)^p\xi^j\wedge\omega^i_j)\otimes S_i.\end{aligned} \tag{2.16}$$

有了推广了的 D，我们就可以定义曲率算子了．

定义 4 设 $E\xrightarrow{\pi}M$ 是一个秩为 r 的复向量丛，算子

$$D\circ D:\ \Gamma(E)\longrightarrow\Gamma(\Lambda^2M\otimes E) \tag{2.17}$$

称为曲率算子.

设 $S=(S_1,\cdots,S_r)^T$ 为 $\Gamma(E)$的局部标架场. 对 $\xi\in\Gamma(E)$,

$$\xi=(\xi^1,\ \cdots,\ \xi^r)S,\ \xi^i\in C^\infty(M),\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

$$D\xi=d\xi^i\otimes S_i+\xi^j\omega^i_j\otimes S_i=(d\xi^i+\xi^j\omega^i_j)\otimes S_i$$
$$\triangleq d\xi+\xi\omega. \tag{2.18}$$

所以有

$$\begin{aligned}D\circ D\xi&=d(d\xi+\xi\omega)+(-1)^1(d\xi+\xi\omega)\wedge\omega\\&=d\xi\wedge\omega+\xi d\omega-d\xi\wedge\omega-\xi\omega\wedge\omega\\&=\xi(d\omega-\omega\wedge\omega)=\xi\Omega,\end{aligned} \tag{2.19}$$

其中 $\Omega=d\omega-\omega\wedge\omega\in\Gamma(\Lambda^2(M)\otimes\mathrm{Hom}(E,\ E))$. (2.20)

Ω 为 $r\times r$ 矩阵，其元素为 M 上的 2 阶外微分形式. Ω 称为曲率方阵，它显然与 S 的选取有关.

下面我们考虑局部标架场改变时,曲率方阵的变化情况.

设两个局部标架场 S 和 $S'=AS$, $A\in GL(r,\ C)$, 相对于 S 和 S' 的联络方阵分别为 ω 和 ω'. 对应的曲率方阵分别为 Ω 和 Ω'.

对(2.15)式求外微分得

$$d\omega'\cdot A-\omega'\wedge dA=dA\wedge\omega+A\cdot d\omega. \tag{2.21}$$

再由(2.15)式有

$$dA=\omega'\cdot A-A\cdot\omega. \tag{2.22}$$

从(2.21)式及(2.22)式得

$$(d\omega'-\omega'\wedge\omega')A=A(d\omega-\omega\wedge\omega),$$

即

$$\Omega'A=A\Omega,$$

$$\Omega'=A\Omega A^{-1}. \tag{2.23}$$

关系式(2.23)是一个非常重要的式子. 它给出了曲率方

阵 Ω 在标架场改变时的变化规律. 从该式可以找出不依赖于标架场的不变量. 所谓陈(省身)示性类就可以从(2.23)式导出. 有兴趣者可参阅[44].

定理 1 曲率方阵 Ω 满足 Bianchi 恒等式

$$d\Omega=\omega\wedge\Omega-\Omega\wedge\omega. \tag{2.24}$$

证明: 对等式 $\Omega=d\omega-\omega\wedge\omega$ 两边求外微分得

$$\begin{aligned}d\Omega&=-d\omega\wedge\omega+\omega\wedge d\omega\\&=-(\Omega+\omega\wedge\omega)\wedge\omega+\omega\wedge(\Omega+\omega\wedge\omega)\\&=\omega\wedge\Omega-\Omega\omega.\end{aligned}$$

注:元素为微分式的矩阵间"∧"运算只是表示矩阵在相乘时,元素间的积是外积,所以一般有 $\omega\wedge\omega\neq 0$.

§2.3 Hermite 全纯向量丛

前面我们介绍了复向丛的一般概念,并且讨论了其联络与曲率. 当时我们在向量丛上除线性结构外没有赋加任何结构. 本节我们将考虑复向量丛上 Hermite 结构问题,并讨论与 Hermite 结构相容的联络.

设 M 为 n 维复流形, $E\xrightarrow{\pi}M$ 为 M 上的秩为 r 的复向量丛. 下面分解是易知的:

$$\Gamma(\Lambda^r(M),E)=\sum_{p+q=r}\Gamma(\Lambda^{p,q}(M),E),$$

其中 $\Lambda^{p,q}(M)$ 表示 M 上的所有 (p,q) 外微分形式所成的空间. 在复局部坐标 $\{z^1,\cdots,z^n\}$ 下, $\Lambda^{p,q}(M)$ 中元素可表为

$$\beta=\beta_{i_1\cdots i_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q}(z)dz^{i_1}\wedge\cdots\wedge dz^{i_p}\wedge d\bar{z}^{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{j_q}.$$

外微分算子 d 分解为 $d=\partial+\bar{\partial}$, 其中

$$\partial:\ \Lambda^{p,q}(M)\longrightarrow\Lambda^{p+1,q}(M)$$

$$\partial\beta=\sum_{a}\frac{\partial\beta_{i_1\cdots i_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q}}{\partial z^a}dz^a\wedge dz^{i_1}\wedge\cdots\wedge dz^{i_p}\wedge d\bar{z}^{j_1}$$

$$\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{j_q}.$$

$$\bar{\partial}:\ \Lambda^{p,q}(M)\longrightarrow\Lambda^{p,q+1}(M)$$

$$\bar{\partial}\beta=\sum_{a}\frac{\partial\beta_{i_1\cdots i_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q}}{\partial\bar{z}^a}d\bar{z}^a\wedge dz^{i_1}\wedge\cdots\wedge dz^{i_p}\wedge d\bar{z}^{j_1}$$

$$\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{j_q}.$$

定义 1 设$E\xrightarrow{\pi}M$为M上的秩为r的复向量丛，E上的 Hermite 结构(度量)是一个 C^∞ 内积h，即

(1) $h(\xi,\ \eta)$关于ξ是线性的，$\xi,\ \eta\in E_x$；

(2) $h(\xi,\ \eta)=\overline{h(\eta,\ \xi)}$；

(3) $h(\xi,\ \xi)>0,\ \xi\neq 0$；

(4) $h(\xi,\ \eta)$为M上的 C^∞ 函数，只要$\xi,\ \eta$为 C^∞ 截面.

我们把带有 Hermite 结构的复向量丛称为 Hermite 向量丛.

定理 1 复流形M上的任何复向量丛均存在 Hermite 结构.

证明： 设$E\xrightarrow{\pi}M$是秩为r的复向量丛. 取M的一组开覆盖$\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$使得$U_\alpha(\alpha\in I)$为复向量丛$E\xrightarrow{\pi}M$的局部平凡化邻域. 在每个$U_\alpha$上，取一组局部标架场$\{S_1{}^\alpha,\ \cdots,\ S_r{}^\alpha\}$，$S_i{}^\alpha\in\Gamma(U_\alpha,\ E)$，$1\leqslant i\leqslant r$. 我们先在$E|_{U_\alpha}$上定义 Hermite 内积为

$$h^\alpha(\xi,\eta)=\sum_i\xi^i\bar{\eta}^i,$$

其中 $\xi=\xi^iS_i{}^\alpha$，$\eta=\eta^iS_i{}^\alpha$.

由于复流形M仿紧，所以存在开覆盖$\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$的加细覆盖，且该加细覆盖$\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$是局部有限的. 设$\{\rho_\alpha(x)\}$为从属$\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$的单位分解，即

$$\rho_\alpha(x)\in C_0^\infty(V_\alpha),\ \ 0\leqslant\rho_\alpha\leqslant 1,\ \ \sum_{\alpha\in I}\rho_\alpha(x)=1.$$

则
$$h(\xi,\eta)=\sum_{\alpha\in I}\rho_\alpha(x)h^\alpha(\xi,\eta)(x)$$

就是一个定义在整个M上的E的 Hermite 结构.

该定理表明：Hermite 向量丛并没有在复向量丛上附加上任何实质的新内容.

全纯向量丛上加上 Hermite 结构就得到 Hermite 全纯向量丛. 我们在点 $x\in M$ 附近取定一组全纯(截面)标架 $\{e_1,\cdots,e_r\}$，并记

$$h_{\alpha\bar\beta}=h(e_\alpha,e_\beta)=\langle e_\alpha,e_\beta\rangle.$$

定义 2 Hermite 全纯向量丛 $E\xrightarrow{\pi}M$ 上的联络 D 称为与 Hermite 度量相容，如果对于任何 ξ，$\eta\in\Gamma(E)$，有

$$d\langle\xi,\eta\rangle=\langle D\xi,\eta\rangle+\langle\xi,D\eta\rangle. \tag{3.1}$$

这种联络也称为度量联络.

设$\{e_1,\cdots,e_r\}$为 Hermite 全纯向量E的全纯标架，度量联络D相对于$\{e_1,\cdots,e_r\}$的联络矩阵为 $\omega=(\omega_\beta^\alpha)$，我们有

$$\begin{aligned}dh_{\alpha\bar\beta}&=d\langle e_\alpha,e_\beta\rangle=\langle De_\alpha,e_\beta\rangle+\langle e_\alpha,De_\beta\rangle\\&=\omega_\alpha^\gamma\cdot h_{\gamma\bar\beta}+\bar\omega_\beta^\gamma\cdot h_{\alpha\bar\gamma},\end{aligned}\tag{3.2}$$

即
$$dh=\omega\cdot h+h\cdot\bar\omega^T. \tag{3.3}$$

对于全纯向量丛E，若对于任何E的全纯截面ξ，$D\xi$是E值(1,0)形式，则称联络D为(1,0)型的. 我们将D分解成$D=D'+D''$，其中

$$D':\ \Gamma(E)\longrightarrow\Gamma(T^{1,0})^*(M)\otimes E),$$

$$D'':\ \Gamma(E)\longrightarrow\Gamma(T^{0,1})^*(M)\otimes E).$$

对于推广后的D亦有分解：$D=D'+D''$，其中

$$D': \Gamma(\Lambda^{p,q}(M)\otimes E)\longrightarrow\Gamma(\Lambda^{p+1,q}(M)\otimes E),$$
$$D'': \Gamma(\Lambda^{p,q}(M)\otimes E)\longrightarrow\Gamma(\Lambda^{p,q+1}(M)\otimes E).$$

联络D为(1,0)型的等价于 $D=D'+\bar\partial$，其中

$$\bar\partial: \Gamma(\Lambda^{p,q}(M)\otimes E)\longrightarrow\Gamma(\Lambda^{p,q+1}(M)\otimes E)$$
$$\xi^i\otimes e_i\longmapsto\bar\partial(\xi^i\otimes e_i)=(\bar\partial\xi^i)\otimes e_i$$

$\xi^i\in\Lambda^{p,q}(M)$，$\{e_1,\cdots,e_r\}$为全纯向量E的全纯标架．通常我们把 Hermite 全纯向量从上的（1,0）型度量联络称为 Hermite 联络，或复度量联络．

定理2　Hermite 全纯向量从上的复度量联络由其 Hermite 度量唯一决定．

证明：对 Hermite 度量 $h=(h_{\alpha\bar\beta})$，$dh=\partial h+\partial h$．又因(3.3)式得

$$\partial h+\bar\partial h=\omega\cdot h+h\cdot\bar\omega^T. \tag{3.4}$$

比较(3.4)式两端的微分形式的类型，我们有

$$\omega=\partial h\cdot h^{-1}. \tag{3.5}$$

因为

$$\partial\omega=\partial(\partial h\cdot h^{-1})=-\partial h\wedge\partial h^{-1}=\partial h\wedge h^{-1}\cdot\partial h\cdot h^{-1}$$
$$=\partial h\cdot h^{-1}\wedge\partial h\cdot h^{-1}=\omega\wedge\omega, \tag{3.6}$$

所以有

$$\Omega=d\omega-\omega\wedge\omega=\partial\omega+\bar\partial\omega-\omega\wedge\omega=\bar\partial\omega$$
$$=\bar\partial(\partial h\cdot h^{-1})=(\bar\partial\partial h)h^{-1}-\partial h\wedge\bar\partial h^{-1}$$
$$=-(\partial\bar\partial h)\cdot h^{-1}+(\partial h)h^{-1}\wedge(\bar\partial h)h^{-1}. \tag{3.7}$$

容易验证联络方阵 $\omega=\partial h\cdot h^{-1}$在局部标架场改变时遵从公式(2.15)．定理 2 证毕．

下面我们要写出曲率矩阵的局部坐标表达式．设复局部坐标为$\{z^1,\ \cdots,\ z^n\}$．我们用 α，β 等希腊字母表示纤维的

指标，即 $1\leqslant \alpha,\ \beta\leqslant r$. 用小写英文字母 i，j 等表示M的局部坐标的指标，$1\leqslant i,\ j\leqslant n$.

记 $h^{-1}=(h^{\alpha\bar{\beta}})$ 及

$$\Omega=(\Omega^{\alpha}_{\beta}),\quad \Omega^{\alpha}_{\beta}=R^{\alpha}_{\beta i\bar{j}}dz^{i}\wedge d\bar{z}^{j},$$

则(3.6)式可改写为

$$R^{\alpha}_{\beta i\bar{j}}=-h^{\alpha\bar{\gamma}}\cdot\frac{\partial h_{\beta\bar{\gamma}}}{\partial z^{i}\partial\bar{z}^{j}}+h^{\alpha\bar{\delta}}h^{s\bar{\gamma}}\frac{\partial h_{\beta\bar{\gamma}}}{\partial z^{i}}\cdot\frac{\partial h_{s\bar{\delta}}}{\partial\bar{z}^{j}}. \qquad (3.8)$$

又设$\{e_1,\ \cdots,\ e_r\}$为 Hermite 全纯向量从E的局部(截面)标架，D为E上的复度量联络，记

$$D_{\frac{\partial}{\partial z^{i}}}(\xi)=(D\xi)\left(\frac{\partial}{\partial z^{i}}\right),\qquad D_{\frac{\partial}{\partial\bar{z}^{i}}}(\xi)=(D\xi)\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}^{i}}\right),$$

其中 $\xi\in\Gamma(E)$，$D_{\frac{\partial}{\partial z^{i}}}\xi$ 称为截面 ξ 关于$\dfrac{\partial}{\partial z^{i}}$的协变导数.

由前面讨论知复度量联络的曲率方阵的元素为(1,1)形式，即 Ω^{α}_{β} 为(1,1)形式。

$$\Omega^{\alpha}_{\beta}=R^{\alpha}_{\beta i\bar{j}}dz^{i}\wedge d\bar{z}^{j}.$$

我们定义

$$R\left(\frac{\partial}{\partial z^{i}},\ \frac{\partial}{\partial\bar{z}^{j}}\right)=D_{\frac{\partial}{\partial z^{i}}}D_{\frac{\partial}{\partial\bar{z}^{j}}}-D_{\frac{\partial}{\partial\bar{z}^{j}}}D_{\frac{\partial}{\partial z^{i}}}-D_{\left[\frac{\partial}{\partial z^{i}},\frac{\partial}{\partial\bar{z}^{j}}\right]}$$

$$=D_{\frac{\partial}{\partial z^{i}}}D_{\frac{\partial}{\partial\bar{z}^{j}}}-D_{\frac{\partial}{\partial\bar{z}^{j}}}D_{\frac{\partial}{\partial z^{i}}}. \qquad (3.9)$$

我们有关系式

$$D^{2}e_{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial z^{i}},\ \frac{\partial}{\partial\bar{z}^{j}}\right)=R\left(\frac{\partial}{\partial z^{i}},\ \frac{\partial}{\partial\bar{z}^{j}}\right)e_{\alpha}. \qquad (3.10)$$

事实上，

$$D^2 e_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right) = (D\circ De_\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right)$$

$$= \left(D_{\frac{\partial}{\partial z^i}} D_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}} - D_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}} D_{\frac{\partial}{\partial z^i}}\right) e_\alpha = R\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right) e_\alpha .$$

(3.10)亦可写为

$$R\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right) e_\alpha = \Omega_\alpha^\beta\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right) e_\beta$$

$$= R_{\alpha k \bar{l}}^\beta dz^k \wedge d\bar{z}^l \left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right) e_\beta$$

$$= R_{\alpha i \bar{j}}^\beta e_\beta. \tag{3.11}$$

记
$$R_{\alpha\bar{\beta}i\bar{j}} = -\left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right) e_\alpha, e_\beta \right\rangle$$

$$= -\langle R_{\alpha i\bar{j}}^\gamma e_\gamma, e_\beta\rangle = -h_{\gamma\bar{\beta}} R_{\alpha i \bar{j}}^\gamma. \tag{3.12}$$

由(3.8)式得

$$R_{\alpha\bar{\beta}i\bar{j}} = \frac{\partial^2 h_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} - h^{\delta\bar{\gamma}} \frac{\partial h_{\alpha\bar{\gamma}}}{\partial z^i} \cdot \frac{\partial h_{\delta\bar{\beta}}}{\partial \bar{z}^j}. \tag{3.13}$$

由公式 $dh = \omega h + h\bar{\omega}^T$ 两边求外微分得

$$\Omega h + h\bar{\Omega}^T = 0, \tag{3.14}$$

即矩阵 $\Omega\cdot h$ 为反 Hermite 方阵. 特别，若$\{e_1, \cdots, e_r\}$为单位正交标架，则有 $\Omega + \bar{\Omega}^T = 0$.

由公式(3.14)有

$$\overline{R_{\alpha\bar{\beta}i\bar{j}}} = R_{\beta\bar{\alpha}j\bar{i}}.$$

我们把 $R_{\beta i\bar{j}}^\alpha dz^i \wedge dz^j$ 及 $-R_{\alpha\bar{\beta}i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$ 均称为向量从 E 的曲率形式.

Ricci 曲率张量的分量 $R_{i\bar{j}}$ 定义为

$$R_{i\bar{j}}=\sum_{\alpha}R^{\alpha}_{\alpha i\bar{j}}=-\sum_{\alpha,\beta}h^{\alpha\bar{\beta}}R_{\alpha\bar{\beta}ij}. \qquad (3.15)$$

直接计算可得

$$R_{i\bar{j}}=-\frac{1}{H}\frac{\partial^2 H}{\partial z^i\partial\bar{z}^j}+\frac{1}{H^2}\frac{\partial H}{\partial z^i}\cdot\frac{\partial H}{\partial\bar{z}^i}=-\frac{\partial^2\ln H}{\partial z^i\partial\bar{z}^j}, \qquad (3.16)$$

其中 $H=\det(h_{\alpha\bar{\beta}})$.

适当取标架，可以简化许多问题的计算和证明.

定理 3 设 $E\xrightarrow{\pi}M$ 为一 Hermite 全纯向量丛，对于任何M上的点p，并设p点附近的复局部坐标$\{z^1,\cdots,z^n\}$, $z^i(p)=0$，则存在一全纯局部标架，使得关于该全纯标架在p点附近有

$$h(z)=(h_{\alpha\bar{\beta}}(z))=I+o(|z|^2), \qquad (3.17)$$

其复度量联络的曲率为

$$\Omega(0)=\bar{\partial}\partial h(0). \qquad (3.18)$$

证明：设E的全纯标架为$\{e_1,\cdots,e_r\}$，度量矩阵为$h=(h(e_\alpha,e_\beta))$. 因$h(0)$为正定 Hermite 方阵，据 Schur 定理[87]知存在酉方阵U使得

$$Uh(0)\bar{U}^T=\text{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r\},\ 0<\lambda_i,\ i=1,\cdots,r.$$

再取 $\Lambda=\text{diag}\{(\sqrt{\lambda_1})^{-1},\ \cdots,\ (\sqrt{\lambda_r})^{-1}\}$，则有

$$(\Lambda U)h(0)\overline{(\Lambda U)}^T=I.$$

记$\Lambda U=B\in GL(r,C)$，其中λ_i为$h(0)$的特征值. 所以我们得到一个新的全纯标架$\tilde{e}=\tilde{B}e$，其中$\tilde{B}$为在点p附近全纯，且$\tilde{B}(0)=B$.

$$\tilde{h}=(\tilde{h}_{\alpha\bar{\beta}})=(h(\tilde{e}_\alpha,\tilde{e}_\beta))=\tilde{B}h(\bar{\tilde{B}})^T,\ \tilde{h}(0)=I,$$

所以有 $$\tilde{h}(z)=I+o(|Z|).$$

我们取局部全纯标架 $e' = C(Z)\tilde{e}$，其中 $C(Z) = I + A(Z)$，而 $A(Z)$ 中元素均为 Z 的线性函数，当然全纯．于是有

$$
\begin{aligned}
h' &= C(\tilde{h})\overline{C}^T = (I + A(Z))\tilde{h}(I + \overline{A(Z)^T}) \\
&= \tilde{h} + A(Z)\tilde{h} + \tilde{h}\overline{A(Z)}^T + o(|Z|^2) \\
&= I + A(Z) + \overline{A}(Z)^T + \tilde{h} \text{ 的一次项} + o(|Z|^2).
\end{aligned}
$$

由于 $\overline{(A(Z) + \overline{A}(Z)^T + \tilde{h})}^T = A(Z) + \overline{A(Z)}^T + \tilde{h}$，即 $A + \overline{A}^T + \tilde{h}$ 为 Hermite 矩阵，因此可以找这样的 $A(Z)$ 满足定理的要求．因而有

$$
h'(Z) = I + o(|Z|^2),
$$

自然也有 $[h'(Z)]^{-1} = I + o(|Z|^2)$ 及 $\Omega(0) = \bar{\partial}\partial h'(0)$．定理 3 证毕．

§ 2.4 Hermite 流形与 Kähler 流形

在本节中，我们利用上节中的方法和结果讨论复流形，即 Hermite 流形．

定义 1 设 M 为 n 维复流形．如果在 M 的全纯切丛 $T^{1,0}(M)$ 上存在一个 Hermite 度量 h，则 (M, h) 称为 Hermite 流形．

取 M 的复局部坐标 $\{z^1, \cdots, z^n\}$，则 $\frac{\partial}{\partial z^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z^n}$ 是 $T^{1,0}(M)$ 的全纯(局部)截面基．相对于这组基，Hermite 度量为

$$
\left\langle \frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j} \right\rangle = h_{i\bar{j}}.
$$

习惯上，我们将该 Hermite 度量记为

$$ds^2 = h_{i\bar{j}}dz^i d\bar{z}^j. \tag{4.1}$$

据前面一节的结果，Hermite 流形 M 上存在唯一复度量(Hermite)联络 D，其联络方阵 ω 及曲率为

$$\omega = \partial h \cdot h^{-1}, \tag{4.2}$$

$$R^l_{ki\bar{j}} = -h^{l\bar{s}}\frac{\partial^2 h_{k\bar{s}}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} + h^{q\bar{s}} \cdot h^{l\bar{t}} \cdot \frac{\partial h_{k\bar{s}}}{\partial z^i} \cdot \frac{\partial h_{q\bar{t}}}{\partial \bar{z}^j}, \tag{4.3}$$

$$R_{k\bar{l}i\bar{j}} = \frac{\partial^2 h_{k\bar{l}}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} - h^{t\bar{s}}\frac{\partial h_{k\bar{s}}}{\partial z_t} \cdot \frac{\partial h_{t\bar{l}}}{\partial \bar{z}^j} \tag{4.4}$$

设 $w = (w^i_j)$ 及 $w^i_j = \Gamma^i_{kj}\ dz^k$，则由(4.2)得

$$\Gamma^i_{jk} = h^{i\bar{l}} \cdot \frac{\partial h_{j\bar{l}}}{\partial z^k}. \tag{4.5}$$

复度量联络 D 的挠率定义为

$$T(\xi,\ \eta) = D_\xi \eta - D_\eta \xi - [\xi,\ \eta],\ \xi,\ \eta \in A^0(T^{1,0}M). \tag{4.6}$$

取 $\xi = \frac{\partial}{\partial z^i}$, $\eta = \frac{\partial}{\partial z^j}$, 因$\left[\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}\right] = 0$，则有

$$T\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}\right) = D_{\frac{\partial}{\partial z^i}}\frac{\partial}{\partial z^j} - D_{\frac{\partial}{\partial z^j}}\frac{\partial}{\partial z^i}$$

$$= (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})\frac{\partial}{\partial z^k}. \tag{4.7}$$

$$\left(注： D_{\frac{\partial}{\partial z^i}}\frac{\partial}{\partial z^j} = \left(D\frac{\partial}{\partial z^j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right) = \left(\omega^k_j \otimes \frac{\partial}{\partial z^k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right)\right.$$

$$= \omega^k_j\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial z^k}$$

$$\left. = \Gamma^k_{pj}dz^p\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right)\frac{\partial}{\partial z^k} = \Gamma^k_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial z^k}\right)$$

Hermite 流形 M 的度量(4.1)联系着一个(1,1)形式 ω

$$\omega=\frac{\sqrt{-1}}{2}h_{i\bar{j}}dz^i\wedge d\bar{z}^j. \tag{4.8}$$

它是一个实值形式，即 $\bar{\omega}=\omega$. 我们把它称为 M 的基本形式，或 Kähler 形式.

定义2 Hermite 流形 M 称为 Kähler 流形，如果它的 Kähler 形式是闭形式.

Kähler 条件是一个很强的条件，它影响着 M 的拓扑性质. 下面定理就表明了这一点.

定理1 设 M 为紧致的 Kähler 流形，则它的上同调群 $H^2(M,\ \mathrm{R})$非平凡. 换言之，M 的第二 Betti 数大于零.

证明： 设 M 的 Kähler 形式为

$$\omega=\frac{\sqrt{-1}}{2}h_{i\bar{j}}dz^i\wedge d\bar{z}^j.$$

它是 M 上整体定义的实(1,1)形式. 根据 deRham 定理，$[\omega]\in H^2(M,\ \mathrm{R})$. 我们只要证明 $[\omega]\neq 0$，即 ω 不上同调于零元素，也即 ω 不是正合形式即可.

由于

$$\omega^n=\overbrace{\omega\wedge\cdots\wedge\omega}^{n}=\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n n!\ \det h\cdot dz^1\wedge d\bar{z}^1\wedge\cdots\wedge dz^n\wedge d\bar{z}^n,$$

其中 $\det h=\det(h_{i\bar{j}})>0$，而且

$$\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n dz^1\wedge d\bar{z}^1\wedge\cdots\wedge dz^n\wedge d\bar{z}^n$$

为 M 的体积元素. 又因 M 紧致，所以

$$\int_M\omega^n>0. \tag{4.9}$$

由此即可推出 ω 不是正合形式. 否则，如果$\omega = d\varphi$，φ为实1-形式，则 $\omega\wedge\omega = d(\varphi\wedge d\varphi)$，即 $\omega\wedge\omega$ 亦为正合形式. 由归纳法可证对于任何 $1\leqslant r\leqslant n$，ω^r 是正合形式. 特别，ω^n 为正合形式，即 $\omega^n = d\psi$. 由 Stokes 定理得

$$\int_M \omega^n = 0. \tag{4.10}$$

这与(4.9)式相矛盾，所以$[\omega]\neq 0$，定理得证.

由定理 1，我们可以判断一些复流形上是否存在Kähler结构.

例1 Hopf-Calabi-Eckmann 流形 $S^{2p+1}\times S^{2q+1}$ ($p\geqslant 0$，$q\geqslant 1$)上不存在 Kähler 度量.

事实上. 我们只要考查它的 Poincaré 多项式 $P(t)$ 就行了. 所谓 M 的 Poincaré 多项式是指

$$P_M(t) = \sum b_k(M)t^k,$$

其中 $b_k(M) = \dim H^K(M, \mathrm{R})$.

熟知 S^n 的 Poincaré 多项式为 $(1+t^n)$，所以由 Poincaré 多项式的性质得

$$P_{S^{2p+1}\times S^{2q+1}}(t) = (1+t^{2p+1})(1+t^{2q+1}). \tag{4.11}$$

由于 $q\geqslant 1>0$，所以 $P_{S^{2q+1}\times S^{2q+1}}(t)$ 中不含有 2 次项，即 $b_2(S^{2p+1}\times S^{2q+1}) = 0$.

又因 $S^{2p+1}\times S^{2q+1}$ 紧，据定理 1 得，$S^{2p+1}\times S^{2q+1}$ 上不存在 Kähler 度量，因而它不是 Kähler 流形.

尽管如此，Kähler 流形还是很丰富的，以后我们将给出一大批 Kähler 流形的例子.

定理2 对于 Hermite 流形(M, h)，下面条件彼此等价：

(1) h 为Kähler 度量;

(2) $\dfrac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial z^k}=\dfrac{\partial h_{k\bar{j}}}{\partial z^i}$;

(3) $\dfrac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial \bar{z}^k}=\dfrac{\partial h_{i\bar{k}}}{\partial \bar{z}^j}$;

(4) 存在局部定义的C^∞实函数 φ，使$\omega=\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\varphi$;

(5) Hermite 联络无挠.

证明: (1)⇔(2): 由于 ω 为实(1, 1)形式及$(\bar{\partial})=\partial$, 所以有

$$d\omega=0\Leftrightarrow\partial\omega=0\Leftrightarrow\bar{\partial}\omega=0. \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}\partial\omega&=\partial\cdot\frac{\sqrt{-1}}{2}h_{i\bar{j}}dz^i\wedge d\bar{z}^j\\&=\frac{\sqrt{-1}}{2}\frac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial z^k}\,dz^k\wedge dz^i\wedge d\bar{z}^j\\&=\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{k<i}\frac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial z^k}\,dz^k\wedge dz^i\wedge d\bar{z}^j\\&\quad-\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{k>i}\frac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial z^k}dz^i\wedge dz^k\wedge d\bar{z}^j\\&=\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{k<i}\left(\frac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial z^k}-\frac{\partial h_{k\bar{j}}}{\partial z^i}\right)dz^k\wedge dz^i\wedge d\bar{z}^j=0\end{aligned}$$

等价于

$$\frac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial z^k}=\frac{\partial h_{k\bar{j}}}{\partial z^i}.$$

(2)⇔(3): 事实上,由于 $\overline{h_{i\bar{j}}}=h_{j\bar{i}}$, 有

$$\overline{\left(\frac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial z^k}\right)}=\frac{\partial h_{j\bar{i}}}{\partial \bar{z}^k}=\overline{\left(\frac{\partial h_{k\bar{j}}}{\partial z^i}\right)}=\frac{\partial h_{j\bar{k}}}{\partial \bar{z}^i}.$$

(2)⇔(5)：首先由于 $\Gamma^i_{jk}=h^{i\bar{l}}\frac{\partial h_{j\bar{l}}}{\partial z^k}$ 知道(2)等价于$\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}$. 又因(4.7)式得(2)⇔(5).

(1) ⇒(4)：由于ω为实的(1，1)闭形式，根据 Poincaré 引理[68]，存在一个局部的1形式ψ，使$\omega=d\psi$. 将ψ按类型分解为

$$\psi=\psi^{(1,0)}+\psi^{(0,1)},\quad \overline{\psi^{(1,0)}}=\psi^{(0,1)}.$$

$$\omega=d\psi=\partial\psi^{(1,0)}+\bar\partial\psi^{(0,1)}+\partial\psi^{(0,1)}+\bar\partial\psi^{(1,0)},$$

但ω为(1，1)型的，因此

$$\partial\psi^{(1,0)}=\bar\partial^{(0,1)}=0.$$

又由 Dolbeault-Gröthendik[68] 引理，存在局部的 C^∞ 函数 f，使得

$$\psi^{(0,1)}=\bar\partial f\quad 及\quad \psi^{(1,0)}=\partial\bar f.$$

$$\omega=\bar\partial\psi^{(1,0)}+\partial\psi^{(0,1)}=\bar\partial\,\partial\bar f+\partial\bar\partial f$$

$$=\partial\bar\partial\,(f-\bar f)=i\partial\bar\partial\left(\frac{f-\bar f}{i}\right)=i\partial\bar\partial\varphi,$$

其中$\varphi=\frac{f-\bar f}{i}$为 C^∞ 实值函数.

(4) ⇒(1)，显然. 定理2证毕.

设M，N分别为m维和n维复流形. 映射f：$M\to N$称为全纯的，若它在任何局部坐标系下是全纯映射. 设$m\leqslant n$，且f的 Jacobi 矩阵的秩在M上处处为m，则称f为全纯浸入. 如果f为单射，即对于任何x，$y\in M$且$x\neq y$，都有$f(x)\neq f(y)$，则称f为全纯嵌入.

定理3 设N为 Kähler 流形，f：$M\to N$为全纯浸入，则M上存在从N诱导的 Kähler 度量.

证明：设$p\in M$，$\{z^1, \cdots, z^n\}$是N在$f(p)$点附近的复坐标，$\{w^1, \cdots, w^m\}$是M在点p附近的复坐标系，则f可局部地表示为

$$z^k = f^k(w^1, \cdots, w^m).$$

又设N的Hermite度量为

$$ds^2 = \sum h_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j.$$

Kähler形式为

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum h_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j,$$

并且$d\omega = 0$．令

$$\tilde{h}_{i\bar{j}} = \sum (h_{\alpha\bar{\beta}} \cdot f(w)) \frac{\partial z^\alpha}{\partial w^i} \cdot \frac{\partial \bar{z}^\beta}{\partial \bar{w}^j}. \tag{4.13}$$

容易验证$\tilde{h} = (\tilde{h}_{i\bar{j}})$仍为正定的Hermite矩阵．$\tilde{h}$给出$M$上一个Hermite度量

$$d\tilde{s}^2 = \sum \tilde{h}_{ij}\ dw^i\ d\omega_j.$$

其Kähler形式是

$$\tilde{\omega} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum \tilde{h}_{i\bar{j}}\ dw^i \wedge d\bar{w}_j.$$

显然

$$\tilde{\omega} = f^* \omega$$

且　$d\tilde{\omega} = f^*(d\omega) = 0$，定理3证毕．

推论　Kähler流形的任何复子流形均为Kähler流形．

下面我们给出些Kähler流形的例子．

例1　Riemann面是一维Kähler流形．

设Riemann面S上的Hermite度量为

$$ds^2 = \rho dz\ d\bar{z}.$$

其中ρ为实光滑函数．对应的Kähler形式为

$$\omega=\frac{\sqrt{-1}}{2}\rho\, dz\wedge d\bar{z}.$$

显然有 $d\omega=0$，故 S 为 Kähler 流形。

例2 C^n 为 Kähler 流形，它的度量为

$$ds^2=\sum_i dz^i d\bar{z}^i.$$

Kähler 形式为

$$\omega=\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_i z^i\wedge d\bar{z}^i.$$

$d\omega=0$. 所以 C^n 为 Kähler 流形。

例3 复投影空间 CP^n 是 Kähler 流形.

在每个局部邻域 $U_j=\{[z^1,\cdots,z^{n+1}]\mid z^j\neq 0\}$ 上局部地定义函数 f_j 如下：

$$f_j=\ln\left(\sum_{i=1}^{n+1}|z^i|^2\right)-\ln|z^j|^2$$

$$=\ln\left(1+\sum_{i\neq j}|\xi^j|^2\right). \tag{4.14}$$

若 U_k 上依(4.14)定义的函数记为 f_k，则在 $U_j\cap U_k(j\neq k)$ 上有

$$f_j-f_k=-\ln|z^j/z^k|^2=\ln|z^k|^2=\ln z^k+\ln\bar{z}^k.$$

所以有

$$\partial\bar{\partial}f_j=\partial\bar{\partial}f_k\quad(\text{在 } U_j\cap U_k \text{ 上}). \tag{4.15}$$

因此我们在 M 上整体定义了一个(1，1)形式

$$\omega=\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}f_j.\qquad(\text{在每个 } U_j \text{ 上}).$$

显然 $d\omega=0$. 设

$$\omega=\sqrt{-1}\,h_{i\bar{j}}\,d\xi^i\wedge d\bar{\xi}^j. \tag{4.16}$$

只要我们证明$(h_{i\bar{j}})$为正定 Hermite 矩阵，则

$$h=h_{i\bar{j}}\,d\xi^i\,d\bar{\xi}^j \tag{4.17}$$

就是 CP^n 上的 Kähler 度量.

这里我们仅在 U_1 上验证其正定性，其余部分留给读者.

$$f_1=\ln\left(1+\sum_{j=2}^{n+1}|\xi^j|^2\right),$$

所以

$$\bar{\partial}f_1=\frac{\sum\xi^i\,d\bar{\xi}^i}{1+\sum|\xi^i|^2},$$

$$\partial\bar{\partial}f_1=\frac{\sum d\xi^i\wedge d\bar{\xi}^i}{1+\sum|\xi^i|^2}-\frac{\sum\bar{\xi}^j\,d\xi^j\wedge\sum\xi^i\wedge d\bar{\xi}^i}{(1+\sum|\xi^i|^2)^2}$$

$$=\frac{1}{(1+\sum|\xi^i|^2)^2}[\delta_{ij}(1+\sum|\xi^i|^2)-\bar{\xi}^i\xi^j]$$

$$\times d\xi^i\wedge d\bar{\xi}^j,$$

因而有

$$\sum[\delta_{ij}(1+\sum|\xi^i|^2)-\bar{\xi}^i\xi^j]t^i\bar{t}^j$$

$$=[(\xi,\ \xi)^2+1](t,\ t)-|(t,\ \xi)|^2, \tag{4.18}$$

其中(，)为 C^n 中标准 Hermite 内积. 由 Schwarz 不等式知(4.18)式正定.

由上面的讨论，我们有下面定理.

定理4 任何代数流形都是 Kähler 流形.

下面定理在 Kähler 流形的研究中十分重要，它可以帮助我们简化许多问题的计算和证明.

定理5 设$(M,\ h)$为 Kähler 流形，那么对于任何点

$p\in M$，在 p 点附近存在复局部坐标 $\{z^1, \cdots, z^n\}$，使得 $z^i(p)=0$，

$$h(z)=I+o(|z|^2). \tag{4.19}$$

这样的坐标系称为(复)正规坐标系，也有的作者称它为复测地坐标系.

证明： 如§2.3定理3的证明，我们断言存在一常数矩阵 $B\in \mathrm{GL}(n, \mathrm{C})$，使得 $Bh(0)\overline{B}^T=I$. 我们因此可取复局部坐标$\{z^1, \cdots, z^n\}$，使 $z^i(p)=0$ 及

$$h_{i\bar{j}}(z)=\delta_{ij}+a_{i\bar{j}k}z^k+a_{i\bar{j}\bar{k}}\bar{z}^k+o(|z|^2). \tag{4.20}$$

由于 h 是 Kähler 度量，故

$$a_{i\bar{j}k}=\frac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial z^k}(0)=a_{k\bar{j}i}\,.$$

又因为 $\overline{h_{i\bar{j}}}=h_{j\bar{i}}$，我们有

$$a_{i\bar{j}\bar{k}}=\overline{a_{j\bar{i}k}}=a_{i\bar{k}\bar{j}}.$$

做局部坐标变换

$$z^a=w^a+\frac{1}{2}\sum b^a_{ij}\,w^iw^j\,, \tag{4.21}$$

其中 $b^a_{ij}=b^a_{ji}$ 待定.

$$\tilde{h}_{i\bar{j}}=h_{\alpha\bar{\beta}}(z(\omega))\frac{\partial z^\alpha}{\partial w^i}\left(\overline{\frac{\partial z^\beta}{\partial w^j}}\right). \tag{4.22}$$

由(4.20)及(4.22)得

$$\tilde{h}_{i\bar{j}}(\omega)=\delta_{ij}+\sum_k(a_{i\bar{j}k}w^k+b^j_{ki}\,w^k)$$

$$+\sum(a_{i\bar{j}\bar{k}}\bar{w}^k+\bar{b}^i_{kj}\bar{w}^k)+o(|w|^2). \tag{4.23}$$

(4.23)式用到

$$\frac{\partial \tilde{h}_{i\bar{j}}}{\partial w^k}(0)=\frac{\partial h_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial z^l}(0)\cdot\frac{\partial z^l}{\partial w^k}(0)\cdot\frac{\partial z^\alpha}{\partial w^i}(0)\cdot\left(\overline{\frac{\partial z^\beta}{\partial w^j}}\right)(0)$$

$$+h_{\alpha\bar{\beta}}(0)\frac{\partial}{\partial w^k}\left[\frac{\partial z^\alpha}{\partial w^i}\left(\overline{\frac{\partial z^\beta}{\partial w^j}}\right)\right]$$

$$=a_{\alpha\bar{\beta}l}\delta_{kl}\delta_{\alpha i}\delta_{\beta j}+\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial w^k}\left[\left(\partial_{\alpha i}+\sum b^\alpha_{i\ j}w^j\right)\right.$$

$$\left.\cdot\left(\delta_{\beta j}+\sum\overline{b^\beta_{j\ s}}\ \overline{w}^s\right)\right](0)$$

$$=a_{i\bar{j}k}+\delta_{\alpha\beta}b^\alpha_{i\ k}\delta_{\beta j}=a_{i\bar{j}k}+b^j_{k\,i}$$

及

$$\frac{\partial \tilde{h}_{ij}}{\partial \overline{w}^k}(0)=a_{i\overline{j\bar{k}}}+\overline{b^i_{k\,j}}.$$

在(4.23)式中，令$b^j_{k\,i}=-a_{i\bar{j}k}=-\dfrac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial z^k}(0)$ （从而$\overline{b^i_{k\,j}}=-\overline{a_{j\bar{i}k}}=-a_{i\bar{j}\bar{k}}$），我们得

$$\tilde{h}_{i\bar{j}}(w)=\delta_{ij}+o(|w|^2).$$

坐标系$\{w^1, \cdots, w^n\}$即为所求的正规坐标系，定理得证.

定理 5 表明，Kähler 流形在任何点的局部和 C^n 相差二阶无穷小. 换句话即

$$h_{i\bar{j}}(0)=\delta_{ij},\tag{4.24}$$

$$dh_{ij}(0)=0.\tag{4.25}$$

显然，如果 M 的Hermite 度量 h 在任何点局部均可表为

$$h_{i\bar{j}}(z)=\delta_{ij}+o(|z|^2),$$

那么 $dh_{i\bar{j}}(0)=0$，所以 M 自然为 Kähler 流形.

在正规坐标系下，曲率有最简单的形式.

设 $\omega=\frac{\sqrt{-1}}{2}h_{\alpha\overline{\beta}}dz^{\alpha}\wedge d\overline{z}^{\beta}=-\partial\overline{\partial}\varphi$. 由(3.18)式得

$$R_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}}=\partial_{\alpha}\overline{\partial}_{\beta}\partial_{\gamma}\overline{\partial}_{\delta}(2\varphi)(0),$$

其中$\partial_{\alpha}=\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}$, $\partial_{\overline{\beta}}=\frac{\partial}{\partial \overline{z}^{\beta}}$.

§2.5 从 Riemann 几何观点看 Kähler 流形

我们把 n 维复流形 M 看作 $2n$ 维 C^{∞} 微分流形. 其(实)切空间为 $T_p(M)$. 在复局部坐标$\{z^1, \cdots, z^n\}$下, $T_p(M)$由$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right\}$张成, 其中

$$z^i=x^i+\sqrt{-1}y^i.$$

在切空间 $T_p(M)$上有一自同构 J:

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial}{\partial y^i}, \qquad J\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)=-\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{5.1}$$

对偶地, 有

$$J(dx^i)=dy^i, \quad J(dy^i)=-dx^i.$$

如第二章第一节的讨论, J 可拓广到 $C\otimes T(M)$上去.

M 作为微分流形自然可讨论其上的 Riemann 几何. 不过由于其切空间上有复结构 J, 所以我们当然要求 Riemann 度量为 J 不变的.

定义 1 复流形上的一个 Riemann 度量 g 称为 J 不变的, 若

$$g(JX, JY)=g(X, Y), \quad X, Y\in T(M).$$

有时 J 不变 Riemann 度量也称为 Hermite 度量. 不过要注意它是 Riemann 度量,而不是通常意义上的 Hermite 度量.

J 不变 Riemann 度量的存在性是没有问题的. 由于 M 仿紧, 所以 M 上必存在 C^∞ Riemann 度量 g_1, 置

$$g(X, Y) = g_1(X, Y) + g_1(JX, JY),$$

则 g 即为 M 上的一个 J 不变 Riemann 度量.

命题 1 设 g 为 M 上的 J 不变 Riemann 度量, 则有

(1) $g(X, JY) = -g(JX, Y)$, X, $Y \in T(M)$.

(2) 存在 $T_p(M)$ 的一组单位正交基 $\{X_1, \cdots, X_n, JX_1, \cdots, JX_n\}$.

证明很简单, 留给读者自己证明.

像 §2.1 中我们把 J 拓广到 $T^C(M) = C \otimes T(M)$ 上那样, 我们依复线性把 g 扩充定义在 $T^C(M)$ 上, 即

$$g(\lambda X, Y) = \lambda g(X, Y),\ g(X+Z, Y) = g(X, Y) + g(Z, Y),$$

其中 $\lambda \in C$, X, $Y \in T(M)$.

我们仍把扩充后的对称复线形记为 g.

命题 2 设 g 为 M 上的 J 不变 Riemann 度量, 则有

(1) $g(\bar{V}, \bar{W}) = \overline{g(V, W)}$, V, $W \in T^C(M)$.

(2) $g(Z, \bar{Z}) > 0$, $Z \neq 0$, $Z \in T^C(M)$.

(3) 对任何 U, $V \in T^C(M)$, 若它们为同一类型, 则有 $g(U, V) = 0$.

证明: 命题中的 g 自然理解为扩充后的. (1)与(2)都很简单, 这里我们仅证明(3). 设 U, $V \in T^{1,0}(M)$, 则

$$g(U,V) = g(JU, JV) = g(\sqrt{-1}\,U, \sqrt{-1}V) = -g(U,V),$$

即 $g(U, V) = 0$.

对 $U, V \in T^{0,1}(M)$ 的情形,证明完全相同,不赘述, 证毕.

在 M 的全纯切丛 $T^{1,0}(M)$ 上，g 诱导出一个 Hermite 结构 h：

$$h(U,\ V)=g(U,\ \bar{V}),\ U,\ V\in T^{1,0}(M).$$

在局部复坐标系$\{z^1,\ \cdots,\ z^n\}$中，

$$\begin{aligned}
h_{i\bar{j}}&=h\left(\frac{\partial}{\partial z^i},\ \frac{\partial}{\partial z^j}\right)=g\left(\frac{\partial}{\partial z^i},\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right)\\
&=\frac{1}{4}g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}-\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^i},\ \frac{\partial}{\partial x^j}+\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^j}\right)\\
&=\frac{1}{4}\left[g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\ \frac{\partial}{\partial x^j}\right)+g\left(\frac{\partial}{\partial y^i},\ \frac{\partial}{\partial y^j}\right)\right]\\
&\quad+\frac{\sqrt{-1}}{4}\left[g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\ \frac{\partial}{\partial x^j}\right)-g\left(\frac{\partial}{\partial y^i},\ \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right].
\end{aligned}\tag{5.2}$$

由于

$$g\left(\frac{\partial}{\partial y^i},\ \frac{\partial}{\partial y^j}\right)=g\left(J\frac{\partial}{\partial x^i},\ J\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\ \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\tag{5.3}$$

及

$$g\left(\frac{\partial}{\partial y^i},\ \frac{\partial}{\partial x^j}\right)=g\left(J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right),\ -J\frac{\partial}{\partial y^j}\right)=-g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\ \frac{\partial}{\partial y^j}\right),\tag{5.4}$$

因此

$$h_{i\bar{j}}=\frac{1}{2}g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\ \frac{\partial}{\partial x^j}\right)+\frac{\sqrt{-1}}{2}g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\ \frac{\partial}{\partial y^j}\right).\tag{5.5}$$

局部地我们把 Hermite 度量 h 表为

$$h=h_{i\bar{j}}dz^i d\bar{z}^j=S+\sqrt{-1}A.\tag{5.6}$$

所以我们有

$$S=\mathrm{Re}h$$

$$= \operatorname{Re}\left\{\left[\frac{1}{2}g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + \frac{\sqrt{-1}}{2}g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right)\right]dz^i d\bar{z}^j\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{\left[g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + \sqrt{-1}g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right)\right]\right.$$

$$\left.\times\left[dx^i dx^j + dy^i dy^j + \sqrt{-1}(dy^i dx^j - dx^i dy^j)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)dx^i dx^j + g\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right)dy^i dy^j\right.$$

$$\left.+ 2g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right)dx^i dy^j\right]$$

$$= \frac{1}{2}g, \tag{5.7}$$

即

$$2\operatorname{Re}h = g. \tag{5.8}$$

由上面讨论我们知道：M 上任何一个 J 不变的 Riemann 度量都在 $T^{1,0}(M)$ 上诱导一个 Hermite 度量，而且全纯切从 $T^{1,0}(M)$ 上的任何 Hermite 度量都是由一 J 不变的 Riemann 度量所诱导的．这就是为什么许多书上均把 J 不变 Riemann 度量称为 Hermite 度量的原因．

下面我们把(5.6)式中的 A 求出来，实际上它就是 Kähler 形式．

$$A = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[h - \bar{h}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{h_{i\bar{j}}dz^i dz^j - \overline{h_{i\bar{j}}}\, d\bar{z}^i dz^j\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{2}\left\{h_{i\bar{j}}dz^i \otimes d\bar{z}^j - h_{j\bar{i}}dz^j \otimes dz^i\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-1}}h_{i\bar{j}}dz^i\wedge d\bar{z}^j=-\sqrt{-1}h_{i\bar{j}}dz^i\wedge d\bar{z}^j. \tag{5.9}$$

A 与前面的 Kähler 形式 ω 相差一个 $-1/2$ 常数倍，这在所有讨论中都是没有任何影响的，所以也可称 A 为 M 的 Kähler 形式.

由 g 决定的 M 的 Riemann 联络记为 ∇，我们也把它依复线性推广到 $T^C(M)$ 上去，仍记为 ∇. 把由 h 决定的 $T^{1,0}(M)$ 上的复度量联络记为 D，有 $T^{0,1}(M)$ 上定义 D 的共轭联络(仍记作 D)为

$$D_Z\overline{W}=(\overline{D_{\bar{Z}}W}),\qquad Z,\ W\in T^C(M). \tag{5.10}$$

因此利用共轭关系将 D 扩充到整个 $T^C(M)$ 上. 那么自然要问 ∇ 与 D 的关系是什么? 在一般的 Hermite 流形上它们并不相同，但当 M 为 Kähler 流形时，它们是一致的. 即有下面定理.

定理 1 Hermite 流形 (M,h) 上的复度量联络 D 与 Riemann 联络 ∇ 相同的充要条件是 (M,g) 为 Kähler 流形.

证明: 设 M 的 Hermite 度量为 h，局部地

$$h=h_{i\bar{j}}dz^id\bar{z}^j.$$

我们将 h 按实部、虚部分开，即有

$$h=S+\sqrt{-1}A,$$

则 $2S=h+\bar{h}$ 为作为实流形 M 的 Riemann 度量 g. 由于 D 为复度量联络，所以有

$$\begin{aligned}(Dh)(Z,W)&=Dh(Z,W)-h(DZ,W)-h(Z,DW)\\&=dh(Z,W)-h(DZ,W)-h(Z,DW)\\&=0. \qquad\qquad Z,W\in T^C(M)\end{aligned}$$

即

$$Dh=0. \tag{5.11}$$

考虑 D是否与 Riemann 结构 $g=2S$ 相容. 因

$$Dg=D(2S)=Dh+D\bar{h}=0, \tag{5.12}$$

故联络 D 与 Riemann 度量 $g=2S$ 相容. 由 Riemann 几何基本定理知: $D=\nabla$ 当且仅当 D 为无挠联络. 又由上节定理2 知 D 无挠的充要条件为 M 是 Kähler 流形, 故定理得证.

下面定理给出 Kähler 流形的 Riemann 几何性质的刻划.

定理 2 设(M,h)为 Hermite 流形, 则 M 为Kähler流形当且仅当下列条件之一满足:

(1) 复切向量的类型在平行移动下不变;

(2) 若沿曲线 γ 的实平行向量场为 X, 则 JX 亦为沿 γ 的平行向量场;

(3) $\nabla J\equiv 0$, 即 J 是平行的;

(4) $\nabla\omega\equiv 0$, 即 Kähler 形式是平行的.

证明:

(1) $\Rightarrow$(2): 设 X 为沿光滑曲线 γ: $(-\varepsilon, +\varepsilon)\to M$ 平行的实切向量场, 我们要证 JX 也是沿 $\gamma(t)$的平行向量场. 按类型分解 X 为

$$X=X^{1,0}+X^{0,1}. \tag{5.12}$$

这种分解是唯一的.

命 $A(t)$, $B(t)$分别为 $X^{1,0}$ 和 $X^{0,1}$ 沿 $\gamma(t)$ 的平行移动. 由(1)知道 $A(t)$, $B(t)$分别为(1,0)型与(0,1)型切向量. 由于按类型分解的唯一性有

$$A(0)=X^{1,0}(0)+X^{0,1}(0), \tag{5.13}$$

根据平行移动的性质, 我们又有

$$A(t)=X^{1,0}(t),\quad B(t)=X^{0,1}(t).$$

因此 $X^{1,0}(t)$ 及 $X^{0,1}(t)$ 为沿 $\gamma(t)$ 的平行向量场. 故

$$JX=JX^{1,0}+JX^{0,1}=\sqrt{-1}\,(X^{1,0}-X^{0,1})$$

沿 $\gamma(t)$ 平行.

(2)⇒(1)：仅对(1，0)型切向量场 Z 证明即可.命 Z 为 $\gamma(0)$ 点的(1，0)型切向量，$A(t)$ 为 Z 沿 $\gamma(t)$ 的平行移动，即 $A(0)=Z$. 按类型将 A 分解为

$$A(t)=A^{1,0}(t)+A^{0,1}(t).$$

根据(2)，$JA=JA^{1,0}+JA^{0,1}=\sqrt{-1}\;(A^{1,0}-A^{0,1})$ 也沿 $\gamma(t)$ 平行. 由此即得 $A^{1,0}$ 和 $A^{0,1}$ 沿 $\gamma(t)$ 是平行的. 又因

$$A^{1,0}(0)+A^{0,1}(0)=A(0)=Z,$$

我们得 $$A^{0,1}(0)=0,\quad A^{1,0}(0)=Z.$$

根据平行移动的性质有

$$A^{0,1}(t)\equiv 0,\quad 沿\ \gamma(t).$$

因此平行移动保持复切向量的类型不变.

(2)⇒(3)：我们只要证明局部地 $\nabla J=0$ 即可. 对于任何 $p\in M$ 及 $v\in T_p(M)$，则有曲线 $\gamma(t)$ 满足 $\gamma(0)=p$，且 v 在 p 点切于曲线 $\gamma(t)$. 令 A 为沿曲线 $\gamma(t)$ 平行的向量场. 由(2)得 JA 亦沿 $\gamma(t)$ 平行. 所以有

$$(\nabla_v J)(A)=\nabla_v(JA)-J(\nabla_v A)=0,$$

即 $\nabla_v J=0$. 由 V 的任意性有 $\nabla J\equiv 0$.

(3)⇒(2)：设向量场 A 满足 $\nabla_v A=0$，$v\in T_p(M)$. 由于

$$\nabla_v(JA)=(\nabla_v J)A+J(\nabla_v A)=0,$$

所以若 A 沿曲线 $\gamma(t)$ 平行，则 JA 也沿 $\gamma(t)$ 平行.

在往下证明之前，我们先证一个等式：

$$\omega(Z,W)=g(JZ,W),\qquad Z,W\in T^{C}(M). \tag{5.14}$$

事实上，只有 Z，W 为不同类型时，$\omega(Z,W)\neq 0$，等式(5.14)右边也是这样的. 在局部复坐标系$\{z^1, \cdots, z^n\}$中，取

$$Z=\frac{\partial}{\partial z^i},\quad W=\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}.$$

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial z^i},\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right)=\sqrt{-1}\ h_{i\bar{j}} \tag{5.15}$$

而且

$$g\left(J\frac{\partial}{\partial z^i},\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right)=g\left(\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial z^i},\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right)$$

$$=\sqrt{-1}\ h_{i\bar{j}}, \tag{5.16}$$

其中 $g=2\mathrm{Re}h$ 为 T 不变 Riemann 度量. 故得(5.14).

(3)$\Longleftrightarrow$(4):

$$\begin{aligned}
&\nabla_Z\omega(X,Y)=Z\omega(X,Y)-\omega(\nabla_Z X,Y)-\omega(X,\nabla_Z Y)\\
&=Zg(JX,Y)-g(J(\nabla_Z X),Y)-g(JX,\nabla_Z Y)\\
&=(\nabla_Z g)(JX,Y)+g(\nabla_Z(JX),Y)+g(JX,\nabla_Z X)\\
&\quad -g(J(\nabla_Z X),Y)-g(JX,\nabla_Z Y),
\end{aligned}$$

由于 ∇为 Riemann 联络，故 $\nabla g=0$. 又因

$$(\nabla_Z J)X=\nabla_Z(JX)-J(\nabla_Z X),$$

所以我们有

$$\begin{aligned}
&\nabla_Z\omega(X,Y)\\
&=g((\nabla_Z J)X,Y)+g(J(\nabla_Z X),Y)\\
&\quad +g(JX,\nabla_Z Y)-g(J(\nabla_Z X),Y)-g(JX,\nabla_Z Y)\\
&=g((\nabla_Z J)X,Y),
\end{aligned} \tag{5.17}$$

因此 $\nabla_Z\omega=0$ 等价于 $\nabla_Z J=0$.

下面只要证明上述定理中的四个条件中的某个等价于 $d\omega=0$ 即可.

(4)$\Rightarrow d\omega=0$:

取 M 的 C^∞局部坐标系$\{t^1,\cdots t^n,t^{n+1},\cdots t^{2n}\}$, 则由§1.7定理1,

$$d\omega=\sum_{i=1}^{2n}dt^i\wedge\nabla_{\frac{\partial}{\partial t^i}}\omega,$$

得 $d\omega=0$, 即 M 为 Kähler 流形.

$d\omega=0\Rightarrow$(3):

我们首先证明下面一个等式:

$$g((\nabla_Z J)X,Y)=\frac{1}{2}d\omega(X,Y,Z)-\frac{1}{2}d\omega(JX,JY,Z). \tag{5.18}$$

注意到等式(5.18)中所有项均为张量，所以我们在每点验证即可. 取 $p\in M$ 的复局部坐标为$\{z^1,\cdots,z^n\}$, 则$\{x^1,y^1,\cdots,x^n,y^n\}$为 M 的 C^∞ 坐标系. 我们无妨取 $X=\frac{\partial}{\partial x^A}$, $Y=\frac{\partial}{\partial x^B}$, $Z=\frac{\partial}{\partial x^C}$, $A=1,\cdots n,n+1,\cdots,2n$,其中$\frac{\partial}{\partial x^{n+i}}=\frac{\partial}{\partial y^i}$, $i=1,\cdots,n$. 所以 X,Y,Z,JX,JY,JZ 间任何两个的 Poisson 括号为零.

$$\begin{aligned}&g((\nabla_Z J)X,Y)\\&=g(\nabla_Z(JX)-J(\nabla_Z X),Y)\\&=g(\nabla_Z(JX),Y)+g(\nabla_Z X,JY)\\&=\frac{1}{2}[(JX)g(Y,Z)+Zg(JX,Y)-Yg(JX,Z)]\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}[Zg(X,JY)+Xg(JY,Z)-JY\ g(X,Z)].$$

(5.19)

另一方面，

$$d\omega(X,Y,Z)=X\omega(Y,Z)+Z\omega(X,Y)-Y\omega(X,Z)$$
$$=Xg(JY,Z)+Zg(JX,Y)-Yg(JX,Z)$$

(5.20)

以及

$$d\omega(JX,JY,Z)=(JX)\omega(JY,Z)+Z\omega(JX,JY)$$
$$-(JY)\omega(JX,Z)$$
$$=-(JX)g(Y,Z)-Zg(X,JY)$$
$$+(JY)g(X,Z). \qquad (5.21)$$

由(5.19)，(5.20)及(5.21)式即得(5.18)式．据(5.18)式，若 $d\omega=0$，自然有 $\nabla J=0$．至此完全证明了定理2．

我们通过§2.4定理2、定理5及本节定理2，给出了Kähler流形几个等价条件．

对于Kähler流形 M，其复度量联络(等于Riemann联络)还有如下性质：

$$\Gamma^{\bar{k}}_{ij}=\Gamma^{k}_{\bar{i}\bar{j}}=\Gamma^{\bar{k}}_{i\bar{j}}=\Gamma^{k}_{i\bar{j}}=0. \qquad (5.22)$$

实际上，由于

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^i}}J\frac{\partial}{\partial z^j}=\sqrt{-1}\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial z^i}}\frac{\partial}{\partial z^j}=\sqrt{-1}\ \Gamma^{k}_{ij}\frac{\partial}{\partial z^k}$$
$$+\sqrt{-1}\ \Gamma^{\bar{k}}_{ij}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}$$
$$=J\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^i}}\frac{\partial}{\partial z^j}=\sqrt{-1}\ \Gamma^{k}_{ij}\frac{\partial}{\partial z^k}-\sqrt{-1}\ \Gamma^{\bar{k}}_{ij}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k},$$

所以 $\Gamma^{\bar k}_{ij}=0$. 同样由 (5.23)

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^i}} J\frac{\partial}{\partial z^j}=-\sqrt{-1}\,\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^i}}\frac{\partial}{\partial z^j}$$

$$=-\sqrt{-1}\,\Gamma^k_{i\bar j}\frac{\partial}{\partial z^k}-\sqrt{-1}\,\Gamma^{\bar k}_{i\bar j}\frac{\partial}{\partial z^k}$$

$$=J\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^i}}\frac{\partial}{\partial z^j}=\sqrt{-1}\,\Gamma^k_{i\bar j}\frac{\partial}{\partial z^k}-\sqrt{-1}\,\Gamma^{\bar k}_{i\bar j}\frac{\partial}{\partial z^k}$$

得 $\Gamma^k_{i\bar j}=0$. 再根据 $\Gamma^{\bar k}_{\bar i\bar j}=\overline{\Gamma^k_{ij}}$，我们又有

$$\Gamma^k_{\bar i\bar j}=0 \quad 及 \quad \Gamma^{\bar k}_{\bar i j}=0.$$

反之，我们可由性质(5.22)推出流形为 Kähler 流形，即有下述定理：

定理3 Hermite 流形(M,g)(连通的)是 Kähler 的当且仅当(5.22)成立. 其中

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^i}}\left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right)=\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial z^k}+\Gamma^{\bar k}_{ij}\frac{\partial}{\partial \bar z^k}.$$

§2.6 全纯截曲率

对于 Kähler 流形 M，我们知道它的复度量联络 D 与其 Riemann 联络 ∇ 相同. 这给我们的讨论带来了很多方便.

命题1 对 $X,Y,Z\in T(M)$，有

(1) $R(JX,JY)=R(X,Y)$;

(2) $R(X,Y)JZ=JR(X,Y)$.

证明： (2) 可由 $\nabla J=0$ 马上推出. 记

$$R(X,Y,Z,W)=-g(R(X,Y)Z,W).$$

由于

$$
\begin{aligned}
R(JX,JY,Z,W) &= -g(R(JX,JY)Z,W) \\
&= -g(R(Z,W)JX,JY) \\
&= -g(JR(Z,W)X,JY) \\
&= -g(R(Z,W)X,Y) \\
&= -g(R(X,Y)Z,W) \\
&= R(X,Y,Z,W),
\end{aligned}
$$

故有 $R(JX,JY)=R(X,Y)$，并且

$$
\begin{aligned}
R(JX,JY,Z,W) &= R(Z,W,JX,JY) \\
&= R(X,Y,Z,W). \qquad (6.1)
\end{aligned}
$$

对于单位(实)切向量 $X,Y\in T_p(M)$，我们定义两个特殊的 Riemann 截曲率：$R(X,JX,Y,JY)$和 $R(X,JX,X,JX)$(即 $X=Y$)．它们分别称为全纯双截曲率和全纯截曲率．

容易验证 $R(X,JX,Y,JY)$为 $T_p(M)$ 中由 X,Y 张成的 J 不变的 4 维子空间 W 的函数，而不依赖于 X,Y 的选取．即若U,V,JU,JV 亦张成W，则有

$$
R(X,JX,Y,JY)=R(U,JU,V,JV).
$$

引理1 设 V 为 $2m$ 维实向量空间并且有复结构 $J(J\colon V\to V$自同构，$J^2=I)$，R，T 为 V上的 4 阶张量，即 R，T 均为四重线性映射

$$
R,T\colon \quad V\times V\times V\times V\to \mathbb{R}.
$$

假设 R,T 满足 Riemann 曲率(4 阶)张量的所有性质及(6.1)式，则由下面条件

$$
R(X,JX,X,JX)=T(X,JX,X,JX) \quad X\in V
$$

立即可以推出 $R=T$.

证明： 只需证明 $T=0$ 的情形就行了．设

$$\tilde{R}(X,Y,U,V)=R(X,JY,U,JV)+R(X,JU,Y,JV)$$
$$+R(X,JV,Y,JV),$$

则四重线性映 $\tilde{R}$ 满足

(1) $\tilde{R}(X,X,X,X)=R(X,JX,X,JX)+R(X,JX,X,JX)$
$$+R(X,JX,X,JX)$$
$$=0. \qquad (6.2)$$

(2) 根据它所满足的条件(6.1)及 Riemann 曲率张量的(前 2 个)性质知道 $\tilde{R}$ 关于 X, Y, U 和 V 对称. 利用极化可得$\tilde{R}\equiv 0$. 特别

$$\begin{aligned}&\tilde{R}(X,Y,X,Y)\\&=R(X,JY,X,JY)+R(X,JX,Y,JY)\\&\quad+R(X,JY,Y,JX)\\&=2R(X,JY,X,JY)+R(X,JX,Y,JY)=0. \qquad (6.3)\end{aligned}$$

再由 Bianchi 恒等式

$$R(X,JX,Y,JY)+R(X,Y,JY,JX)+R(X,JY,JX,Y)=0.$$

得 $R(X,JX,Y,JY)-R(X,Y,JX,JY)-R(X,JY,X,JY)=0$
$$(6.4)$$

由(6.3)及(6.4)式得

$$3R(X,JY,X,JY)+R(X,Y,X,Y)=0. \qquad (6.5)$$

在上式中换 Y 为 JY，即得

$$3R(X,J^2Y,X,J^2Y)+R(X,JY,X,JY)=0,$$
$$3R(X,Y,X,Y)+R(X,JY,X,JY)=0. \qquad (6.6)$$

由(6.5)及(6.6)式得

$$R(X,Y,X,Y)=0.$$

由 §1.5 定理 2 可得 $R=0$. 证毕.

令

$$R_0(X,Y,U,V)$$

$$=\frac{1}{4}\{g(X,U)g(Y,V)-g(X,V)g(Y,U)+g(X,JU)$$

$$\cdot g(Y,JV)-g(X,JV)g(Y,JU)+2g(X,JY)g(V,JV)\}$$

(6.7)

命题2 R_0为 4 阶(协变)张量且满足 Riemann 曲率张量所适合的所有条件，即

(1) $R_0(X,Y,Z,W)=-R_0(Y,X,Z,W)$
$=-R_0(X,Y,W,Z)$;

(2) $R_0(X,Y,Z,W)=R_0(Z,W,X,Y)$;

(3) $R_0(X,Y,Z,W)+R_0(X,W,Y,Z)+R_0(X,Z,W,Y)$
$=0$;

(4) $R_0(JX,JY,Z,W)=R_0(X,Y,JZ,JW)$
$=R_0(X,Y,Z,W)$.

命题 2 由直接计算即可得到.

另外还有

$$R_0(X,JX,X,JX)=g(X,X)^2, \tag{6.8}$$

$$R_0(X,Y,X,Y)=\frac{1}{4}\{g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2$$

$$+3g(X,JY)^2\}. \tag{6.9}$$

命题3 设 M 为 n 维 Kähler 流形，$p\in M$. 若对任何 J 不变的 2 维平面 $\pi\subset T_p(M)$，由 π 决定的全纯截曲率都为常数 k，则有 $R=kR_0$.

证明： 取X,JX为 π 的单位正交基. 由假设得

$$R(X,JX,X,JX)=k,\quad \|X\|=1,\quad X\in T_p(M).$$

而由(6.8)式知 $R_0(X,JX,X,JX)=g(X,X)^2=1$，所以有

$$R(X, JX, X, JX) = kR_0(X, JX, X, JX),$$

由引理 1 得　　$R = kR_0$。

定理1　设 M 为连通的 Kähler 流形，$\dim_C M \geqslant 2$．如果对于任何点 $p \in M$ 以及 $T_p(M)$中任何 J 不变的 2 维平面 π，其全纯截曲率都为不依赖于 π 的常数 $k(p)$，则 $k(p)$ 也不依赖于点 p，即 $k(p)$在整个 M 上为常数 k. 这样的流形称为具有常全纯截曲率的 Kähler 流形。

证明：根据命题 3，我们有

$$R = k(p)R_0. \qquad (6.10)$$

又由§2.5 命题1，对于任何 $X \in T_p(M)$，$\|X\| = 1$，存在 $Y_2, \cdots, Y_n \in T_p(M)$，使得 X，JX，Y_2，JY_2，…，Y_n，JY_n 构成 $T_p(M)$的单位正交基. 因此 Ricci 曲率为

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X, X) &= R(X, JX, X, JX) \\ &+ \sum_{j=2}^{n}[R(X, Y_j, X, Y_j) + R(X, JY_j, X, JY_j)]. \qquad (6.11)\end{aligned}$$

由(6.9)式及(6.8)，(6.10). 我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X, X) &= k(p) + 2(n-1)\frac{k(p)}{4} \\ &= \left(\frac{n+1}{2}\right)k(p) \cdot g(X, X). \qquad (6.12)\end{aligned}$$

从(6.12)式知 $\mathrm{Ric}(X, X)$与 $X \in T_p(M)$($\|X\| = 1$)无关. 根据§1.6 定理 2 知 $k(p)$不依赖于 p，它是一个绝对常数.

从定理 1 可见具有全纯截曲率的 Kähler 流形必为 Einstein 流形.

定理 2　任何两个同维数单连通完备 Kähler 流形 M_1 和 M_2，如果它们具有相同的常全纯截曲率 k，则它们全纯等距

同构.

证明: 取 $p_1 \in M_1, p_2 \in M_2$，我们首先做一个从 $T_{p_1}(M_1)$ 到 $T_{p_2}(M_2)$ 的线性同构变换 T. 由§2.5命题 1有 $\{X_1, JX_1, \cdots, X_n, JX_n\}$ 和 $\{Y_1, JY_1, \cdots, Y_n, JY_n\}$ 分别为 $T_{p_1}(M_1)$ 和 $T_{p_2}(M_2)$ 的单位正交基. 线性变换 T 定义如下

$$T(X_j) = Y_j, \qquad T(JX_j) = J(TX_j) = JY_j. \tag{6.13}$$

上式表明 T 与 J 可交换，并且为保持内积的. 又因为 M_1 和和 M_2 均为常全纯截曲率 k 的 Kähler 流形. 据命题 3得

$$R_{M_1} = kR_{0M_1}, \qquad R_{M_2} = k_{0M_2}. \tag{6.14}$$

由(6.7)式知道 R_0 由度量张量和复结构 J 所决定，所以有 $R_{0M_1} \cdot T = R_{0M_1}$，进而得 $R_{M_1} \cdot T = R_{M_2}$.

由于 M_1, M_2 均为 Kähler 流形，所以 J_{M_1}, J_{M_2} 以及度量张量 g_{M_1}, g_{M_2} 都是平行的，即

$$\nabla J_{M_1} = \nabla J_{M_2} = 0, \qquad \nabla g_{M_1} = \nabla g_{M_2} = 0.$$

由于常全纯截曲率的 Kähler 流形的曲率张量由其度量及复结构 J 所决定（据命题 3），所以 R_{M_1}, R_{M_2} 均是平行的，即 $\nabla R_{M_1} = \nabla R_{M_2} = 0$（这样的 Riemann 流形称为局部对称的）. 根据 Cartan-Ambrose 定理（[85]P. 402），我们知道存在覆盖映射 f: $M_1 \to M_2$，使得 $f_* = T$，$f(p_1) = p_2$. 又因为 M_1, M_2 均为单连通的，所以 f 必为光滑同胚. 又因为 J 平行及

$$T \cdot J_{M_1} = J_{M_2} \cdot T \quad 即 \quad f_{*p_1} \cdot J_{M_1} = J_{M_2} \cdot f_{*p_2},$$

所以对 M_1 所有点均有 $\quad f_* \cdot J_{M_1} = J_{M_2} \cdot f_*$, $\quad$ 即 f 为全纯的. 定理得证.

我们把 Riemann 联络 ∇ 依复线性扩广到 $T^C(M)$ 上，自

然地曲率张量也就扩广得 $T^C(M)$ 上．对于 Kähler 流形 M，有下面结论：

命题 4　设 M 为 Kähler 流形，R 为其 Riemann 曲率张量．则有

（1）对于任何同类型的复切向量 Z，$W\in T^C(M)$，我们有

$$R(Z,\ W)=0.$$

（2）对于任何 $U,V\in T^C(M)$ 及 $Z\in T^{1,0}(M)$（或 $T^{0,1}(M)$），则

$$R(U,\ V)Z\in T^{1,0}(M)(T^{0,1}(M)).$$

证明：（1）设 Z，$W\in T^{1,0}(M)$，则由命题 1，得

$$R(JZ,\ JW)=R(Z,\ W).$$

另一方面又有

$$R(JZ,JW)=R(\sqrt{-1}\,Z,\sqrt{-1}\,W)=-R(Z,W).\tag{6.16}$$

因此有 $R(Z,\ W)=0$．对于 Z，$W\in T^{0,1}(M)$ 的情形证明类同．

（2）设 $W\in T^{1,0}(M)$．由于

$$g(R(U,V)Z,W)=g(R(Z,W)U,V)=0,$$

根据 § 2.5 命题 2 中的（3）得知 $R(U,\ V)Z$ 也是（1，0）型的．同样可以证明若 $Z\in T^{0,1}(M)$，则 $R(U,V)Z\in T^{0,1}(M)$．

取 Kähler 流形 M 的复坐标系 $\{z^1,\ \cdots,z^n\}$，则由命题 4 知道不为零的曲率分量只有

$$R_{\alpha\bar\beta\gamma\bar\delta},\quad R_{\alpha\bar\beta\bar\gamma\delta},\quad R_{\bar\alpha\beta\gamma\bar\delta},\quad R_{\bar\alpha\beta\bar\gamma\delta}.$$

对于 Kähler 流形 M 的（1，0）型切向量 $\xi=\xi^i\dfrac{\partial}{\partial z^i}\in T^{1,0}(M)$，取 $V=2\,\mathrm{Re}\xi=\xi+\bar\xi$，则有下面关系式

$$R(V,\ JV,\ V,\ JV)=-4R(\xi,\bar\xi,\ \xi,\ \bar\xi)$$

$$= -4R_{i\bar{j}k\bar{l}}\xi^i\bar{\xi}^j\xi^k\bar{\xi}^l. \tag{6.17}$$

事实上，

$$
\begin{aligned}
&R(V, JV, V, JV)\\
&= R(\xi+\bar{\xi}, i\xi-i\bar{\xi}, \xi+\bar{\xi}, i\xi-i\bar{\xi})\\
&= (-i)^2R(\xi,\bar{\xi},\xi,\bar{\xi}) - i^2R(\xi,\bar{\xi},\bar{\xi},\xi)\\
&\quad - i^2R(\bar{\xi},\xi,\xi,\bar{\xi}) + i^2R(\bar{\xi},\xi,\bar{\xi},\xi)\\
&= -R(\xi,\bar{\xi},\xi,\bar{\xi}) + R(\xi,\bar{\xi},\bar{\xi},\xi) + R(\bar{\xi},\xi,\xi,\bar{\xi})\\
&\quad - R(\bar{\xi},\xi,\bar{\xi},\xi)\\
&= -4R(\xi,\bar{\xi},\xi,\bar{\xi}) = -4R_{i\bar{j}k\bar{l}}\,\xi^i\bar{\xi}^j\xi^k\bar{\xi}^l.
\end{aligned}
$$

定理3 (1) 对于任何正数 $k>0$，C^n 中的复超球

$$B^n = \{(z^1, \cdots, z^n) \mid \sum_{i=1}^n z^i\bar{z}^i < 1\}$$

上有一完备的 Kähler 度量

$$ds^2 = \frac{4}{k}\frac{(1-\sum_i z^i\bar{z}^i)(\sum_i dz^i d\bar{z}^i) - \sum_i \bar{z}^i dz^i)(\sum_i z^i d\bar{z}^i)}{(1-\sum z^i\bar{z}^i)^2}, \tag{6.18}$$

使得(B^n, ds^2)成为一常全纯截曲率 Kähler 流形，其常全纯截曲率为 $-k$。

(2) C^n 带上通常的 Hermite 内积成为平坦的完备的 Kähler 流形。

(3) 复投影空间 CP^n 上有一完备 Kähler 度量

$$ds^2 = \frac{4}{k}\frac{(1+\sum_i z^i\bar{z}^i)(\sum_i dz^i d\bar{z}^i) - (\sum_i \bar{z}^i dz^i)(\sum_i z^i d\bar{z}^i)}{(1+\sum z^i\bar{z}^i)^2}, \tag{6.19}$$

其中$\{z^1, \cdots, z^n\}$为CP^n 的某一非齐性局部坐标，使得(CP^n,

ds^2)成为以常全纯截曲率为 k 的Kähler 流形。

证明：(3) 是容易验证的。

(1) 度量(6.18)与 B^n 上的 Bergman 度量相差一个常数. 由(6.18)式得

$$-\frac{1}{2}\cdot kg_{\alpha\bar\beta}(z)=\frac{\delta_{\alpha\beta}}{\left(1-\sum_{\alpha}z^{\alpha}\bar z^{\alpha}\right)}-\frac{\bar z^{\alpha}z^{\beta}}{\left(1-\sum_{\alpha}z^{\alpha}\bar z^{\alpha}\right)^2} \tag{6.20}$$

对上式关于$\frac{\partial}{\partial z^{\gamma}}$和$\frac{\partial^2}{\partial z^{\gamma}\partial\bar z^{\delta}}$求微分，并令 $z^1=\cdots=z^n=0$，得

$$g_{\alpha\bar\beta(0)}=-\frac{2}{k}\delta_{\alpha\beta},\qquad \frac{\partial g_{\alpha\bar\beta}}{\partial z^{\gamma}}=0,$$

$$\frac{\partial^2 g_{\alpha\bar\beta}}{\partial z^{\gamma}\partial\bar z^{\delta}}=\frac{2}{k}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}+\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}). \tag{6.21}$$

由于

$$R_{\alpha\bar\beta\gamma\bar\delta}=\frac{\partial^2 g_{\alpha\bar\beta}}{\partial z^{\gamma}\partial\bar z^{\delta}}-g^{\gamma\bar\varepsilon}\frac{\partial g_{\alpha\bar\varepsilon}}{\partial z^{\gamma}}\cdot\frac{\partial g_{\gamma\bar\beta}}{\partial\bar z^{\delta}},$$

所以有

$$\begin{aligned}R_{\alpha\bar\beta\gamma\bar\delta}&=\frac{2}{k}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}+\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})\\&=\frac{2}{k}\left[\frac{-k}{2}g_{\alpha\bar\beta}\cdot\frac{-k}{2}g_{\gamma\bar\delta}+\frac{-k}{2}g_{\alpha\bar\delta}\frac{-k}{2}g_{\gamma\bar\beta}\right]\\&=-(-k/2)[g_{\alpha\bar\beta}g_{\gamma\bar\delta}+g_{\alpha\bar\delta}g_{\gamma\bar\beta}].\end{aligned} \tag{6.22}$$

记 $Z_{\alpha}=\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}$, $Z_{\bar\beta}=\frac{\partial}{\partial\bar z^{\beta}}$. 我们计算

$$R_0(Z_{\alpha},Z_{\bar\beta},Z_{\gamma},Z_{\bar\delta})$$

$$= \frac{1}{4}\{g(Z_\alpha, Z_\gamma)g(\overline{Z}_\beta, \overline{Z}_\delta) - g(Z_\alpha, \overline{Z}_\delta)g(\overline{Z}_\beta, Z_\gamma)$$

$$+ g(Z_\alpha, JZ_\gamma)g(\overline{Z}_\beta, J\overline{Z}_\delta) - g(Z_\alpha, J\overline{Z}_\delta)g(\overline{Z}_\beta, JZ_\gamma)$$

$$+ 2g(Z_\alpha, J\overline{Z}_\beta)g(Z_\gamma, J\overline{Z}_\delta)\}.$$

由于$JZ_\mu = \sqrt{-1}\,Z_\mu$, $J\overline{Z}_\mu = -\sqrt{-1}\,\overline{Z}_\lambda$, 及§2.5命题 2，得

$$R_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}} = (-k)R_0(Z_\alpha, \overline{Z}_\beta, Z_\gamma, \overline{Z}_\delta).$$

根据命题 3 知，在原点 $z^1 = \cdots = z^n = 0$，$(B^n,\ ds^2)$ 的全纯截曲率为$-k$. 由多复变中常识知 $\mathrm{Aut}(B^n)$齐性作用在 B^n 上，并且 $\mathrm{Aut}(B^n) \subset \mathrm{ISO}(B^n)$，所以我们断言$(B^n,\ ds^2)$ 具有常全纯截曲率$(-k) < 0$.

(2) 度量(6.19)与我们在例 2（§2.4)中所给 CP^n 的度量实际上仅差一常数$1/k$.（这种度量通常称为 Study-Fubini 度量.（2）的证明与(1)完全类似，不再重复，定理证毕.

定理 2 与定理 3 表明：具有常全纯截曲率的单连通完备 Kähler 流形本质上只有 C^n，B^n 和 CP^n.

§2.7 Kähler流形上的算子

设 M 为 n 维 Kähler 流形，取它的一个局部复坐标系$\{z^1, \cdots, z^n\}$，那么$\frac{\partial}{\partial z^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z^n}$ 构成 M 的全纯复切空间 $T^{1,0}(M)$的一组基，$dz^1, \cdots, dz^n$ 为其对偶基. 我们有下面公式：

$$\partial = \sum dz^i \wedge \nabla_{\frac{\partial}{\partial z^i}}, \tag{7.21}$$

$$\partial = \sum dz^i \wedge \nabla_{\frac{\partial}{\partial z^i}} , \tag{7.2}$$

$$\partial^* = -\sum I\left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right)\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}} , \tag{7.3}$$

$$\bar{\partial}^* = -\sum I\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right)\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^j}} . \tag{7.4}$$

实际上. 由§1.7定理 1 有

$$\begin{aligned}
d &= \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} + \sum_{i=1}^{n} dy^i \wedge \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (dz^i + d\bar{z}^i) \wedge \nabla_{\frac{\partial}{\partial z^i} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}} \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (dz^i - d\bar{z}^i) \wedge \nabla_{\frac{\partial}{\partial z^i} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} dz^i \wedge \nabla_{\frac{\partial}{\partial z^i}} + \sum_{i=1}^{n} d\bar{z}^i \wedge \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}} \\
&= \partial + \bar{\partial}.
\end{aligned}$$

比较两边算子作用在任何 (p,q) 外微分形上的类型，即得(7.1)与(7.2). 类似方法可证(7.3)，(7.4)。

由于(7.1)～(7.4)式不依赖于局部 (1,0) 型标架场的选取，所有我们有下面定理.

定理1 设$\{V_1, \cdots, V_n\}$为 Kähler 流形 M 的(1,0)型标架场，即$\{V_1, \cdots, V_n\}$为全纯切丛$T^{1,0}(M)$的局部标架场，$\omega^1, \cdots, \omega^n$为其对偶的上标架场，则有

$$\partial = \sum \omega^i \wedge \nabla_{V_i}, \quad \bar{\partial} = \sum \bar{\omega}^i \wedge \nabla_{\bar{V}_i},$$

$$\partial^* = -\sum I(V_i)\nabla_{\bar{V}_i}, \quad \bar{\partial}^* = -\sum I(\bar{V}_i)\nabla_{V_i}.$$

定义1 对于 Kähler 流形 M 上点 p，p 点附近的(1,0)型正交标架场 V_1，…，V_n 称为在 p 点正规，若 $\nabla_{V_i}V_j(p)=0$.

对于 Kähler 流形来说，(1,0)型正规标架场是存在的. 这可由 § 2.4定理 5 得到.

在(1,0)型局部正规标架场$\{V_1, \cdots, V_n\}$的对偶上标架场$\{\theta^1, \cdots, \theta^n\}$下，Kähler 度量为

$$ds^2=\sum_a \theta^a\bar{\theta}^a.$$

Kähler 形式则为

$$\omega=\sqrt{-1}\sum_a \theta^a\wedge\bar{\theta}^a.$$

我们引进一个算子 L:

$$L:\ \Lambda^{p,q}(M)\to\Lambda^{p+1,q+1}(M)$$
$$\alpha\mapsto L(\alpha)=\omega\wedge\alpha$$

引理1 $[\partial^*, L]=-\sqrt{-1}\cdot\bar{\partial}$.

证明: 对于任何 $\alpha\in\Lambda^{p,q}(M)$，我们有

$$(\partial^*L)\alpha-(L\partial^*)\alpha=\partial^*(\omega\wedge\alpha)-\omega\wedge\partial^*\alpha$$
$$=-\sum_i\left[I(V_i)\ \nabla_{\bar{V}_i}(\omega\wedge\alpha)-\omega\wedge I(V_i)\ \nabla_{\bar{V}_i}\alpha\right]$$
$$=-\sum_i\left\{I(V_i)\left[\left(\nabla_{\bar{V}_i}\omega\right)\wedge+\omega\wedge\nabla_{\bar{V}_i}\alpha\right]\right.$$
$$\left.-\omega\wedge I(V_i)\ \nabla_{\bar{V}_i}\alpha\right\}.$$

由于 $I(V)(\alpha\wedge\beta)=I(V)\alpha\wedge\beta+(-1)^{\deg\alpha}\alpha\wedge I(V)\beta$ 及 θ^1，…，θ^n 在 p 点正规，所以有

$$[\partial^*, L]\alpha=-\sum_i(I(V_i)\omega)\wedge\ \nabla_{\bar{V}_i}\alpha$$

$$= -\sqrt{-1}\sum \bar{\theta}^i \wedge \nabla_{\bar{e}_i} \alpha = -\sqrt{-1}\,\bar{\partial}\,\alpha.$$

引理证毕.

注意到 L 为实算子，即$\bar{L}=L$，这是因为

$$\overline{L\alpha} = \overline{\omega\wedge\alpha} = \bar{\omega}\wedge\bar{\alpha} = \omega\wedge\bar{\alpha} = L\bar{\alpha}.$$

对(7.6)式两边取共轭，又有公式

$$[\bar{\partial}^*,\ L] = i\partial. \tag{7.7}$$

另外我们又有公式

$$[\partial,\ L] = 0 \quad 及 \quad [\bar{\partial},\ L] = 0. \tag{7.8}$$

实际上，对于任何 $\alpha\in\Lambda^{p,q}(M)$，有

$$\begin{aligned}[\partial,\ L]\alpha &= \partial(\omega\wedge\alpha) - \omega\wedge\partial\alpha \\ &= \partial\omega\wedge\alpha + (-1)^2\omega\wedge\partial\alpha - \omega\wedge\partial\alpha \\ &= \partial\omega\wedge\alpha = 0.\end{aligned}$$

上式用到 ω 为闭形式. 同样可得$[\bar{\partial},\ L]=0$.

定义2 在 Kähler 流形 M 上，我们定义.

$$\triangle = dd^* + d^*d,$$

$$\square = \partial\partial^* + \partial^*\partial,\quad \bar{\square} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}.$$

通常$\triangle$称为 Hodge-Laplace 算子，$\square$称为 Neumann 算子.

引理2 对于 Kähler 流形 M，有

$$[\triangle,\ L] = 0,\qquad \partial\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\partial = 0. \tag{7.9}$$

证明： 对于任何 $\alpha\in\Lambda^{p,q}(M)$，

$$[d,\ L]\alpha = d\omega\wedge\alpha + \omega\wedge d\alpha - \omega\wedge d\alpha = 0,$$

$$\begin{aligned}[d^*,L] &= [\partial^*,L]\alpha + [\bar{\partial}^*,L]\alpha = -\sqrt{-1}\,\bar{\partial}\alpha + \sqrt{-1}\,\partial\alpha \\ &= \sqrt{-1}\,(\partial - \bar{\partial})\alpha.\end{aligned} \tag{7.10}$$

因此有

$$\triangle L = (dd^* + d^*d)L$$

$$= (dd^*L + d^*dL)$$
$$= [d(\sqrt{-1}(\partial - \bar\partial)) + dLd^*] + d^*Ld$$
$$= Ldd^* + Ld^*d + \sqrt{-1}\, d(\partial - \bar\partial)$$
$$+ \sqrt{-1}(\partial - \bar\partial)d$$
$$= L\triangle + \sqrt{-1}[(\bar\partial\partial - \partial\bar\partial) + (\partial\bar\partial - \bar\partial\partial)]$$
$$= L\triangle,$$

故有$[\triangle, L] = 0$.

最后我们证明 $\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\partial = 0$.

$$\sqrt{-1}(\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\partial) = [\bar\partial^*, L]\cdot\bar\partial^* + \bar\partial^*[\bar\partial^*, L]$$
$$= \bar\partial^*L\bar\partial^* - L\bar\partial^*\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial^*L - \bar\partial^*L\bar\partial^*$$
$$= 0. \qquad (\text{因为}(\bar\partial^*)^2 = 0).$$

引理 2 证毕。

定理2 (Hodge)　对于 Kähler 流形 M，有

$$\square = \bar\square \quad \text{及} \quad \triangle = 2\square.$$

证明：由于$[\partial^*, L] = -\sqrt{-1}\bar\partial$，所以有

$$-\sqrt{-1}\,\bar\square = \bar\partial^*[\partial^*, L] + [\partial^*, L]\bar\partial^*$$
$$= \bar\partial^*\partial^*L - \bar\partial^*L\partial^* + \partial^*L\bar\partial^* - L\partial^*\bar\partial^*$$
$$= \partial^*L\bar\partial^* + \bar\partial^*\partial^*L - L\partial^*\bar\partial^* - \bar\partial^*L\partial^*. \qquad (7.11)$$

由于

$$0 = d^2 = (\partial + \bar\partial)^2 = \bar\partial^2 + \partial^2 + \partial\bar\partial + \bar\partial\partial$$
$$= 0,$$

所以有　$\partial\bar\partial + \bar\partial\partial = 0$. 同样由$(d^*)^2 = 0$，我们得到

$$\partial^*\bar\partial^* + \bar\partial^*\partial^* = 0 \qquad (7.12)$$

利用(7.12)式，(7.11)变为

$$-\sqrt{-1}\,\bar\square = \partial^*L\bar\partial^* - \partial^*\bar\partial^*L + L\bar\partial^*\partial^* - \bar\partial^*L\partial^*$$

$$= \partial^*[L,\bar\partial^*]+[L,\bar\partial^*]\partial^*$$
$$= -\sqrt{-1}\,[\partial^*\partial+\partial\partial^*]$$
$$= -\sqrt{-1}\,\square.$$

因此有$\square=\bar\square$.

$$\triangle = dd^*+d^*d$$
$$= (\partial+\bar\partial)(\partial^*+\bar\partial^*)+(\partial^*+\bar\partial^*)(\partial+\bar\partial)$$
$$= [\partial\partial^*+\partial^*\partial]+[\bar\partial\bar\partial^*+\bar\partial^*\bar\partial]+(\partial\bar\partial^*+\bar\partial^*\partial)$$
$$+(\bar\partial\partial^*+\partial^*\bar\partial)$$
$$= \square+\bar\square$$
$$= 2\,\square.$$

定理 2 证毕.

定理3 (Weitzenböck 公式) 设 M 为 Kähler 流形, V_1, $\cdots$, V_n 为 M 的(1,0)型标架场, θ^1, $\cdots$, θ^n 为其对偶的上标架场. 对于任何 M 上的(p,q)形式 α, 有

$$\square\alpha = -\sum_i \nabla_{V_i\bar V_i}\alpha - \sum_{i,j}\bar\theta_i\wedge I(\bar V_j)R(\bar V_i,V_j)\alpha. \tag{7.13}$$

证明: 由$\square=\bar\square=\bar\partial\bar\partial^*+\bar\partial^*\bar\partial^*$, 有

$$\bar\partial\bar\partial^*\alpha = -\sum_{i,j}\bar\theta^j\wedge\nabla_{\bar V_j}[I(\bar V_i)\nabla_{V_j})\alpha] \qquad (\because I(\bar V_i)\nabla_{V_i}=\nabla_{V_i}I(\bar V_i))$$
$$= -\sum\bar\theta^j\wedge I(\bar V_i)\nabla_{\bar V_j}\nabla_{V_i}\alpha. \tag{7.14}$$

另一方面,

$$\bar\partial^*\bar\partial\alpha = -\sum_{i,j}I(\bar V_j)\nabla_{V_j}[\bar\theta^i\wedge\nabla_{\bar V_i}\alpha]$$

$$= -\sum_{i,j} I(\bar{V}_j)(\bar{\theta}^j \wedge \nabla_{V_j}\nabla_{\bar{V}_i}\alpha) \quad (\because \{\theta^i\}\text{为正规的})$$

$$= -\sum_i \nabla_{V_i}\nabla_{\bar{V}_i}\alpha + \sum_{i,j}\bar{\theta}^i \wedge I(\bar{V}_j)(\nabla_{V_j}\nabla_{\bar{V}_i}\alpha). \tag{7.15}$$

因此

$$\begin{aligned}\square &= \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}^*\bar{\partial} \\ &= -\sum_i \nabla^2_{V_i\bar{V}_i}\alpha - \sum_{i,j}\bar{\theta}^i \wedge I(\bar{V}_j)[\nabla_{\bar{V}_i}\nabla_{V_j} \\ &\qquad - \nabla_{V_j}\nabla_{\bar{V}_i}]\alpha \\ &= -\sum_i \nabla^2_{V_i\bar{V}_j}\alpha - \sum_{i,j}\bar{\theta}^i \wedge I(\bar{V}_j)R(\bar{V}_i, V_j)\alpha.\end{aligned}$$

上式用到 $[\bar{V}_i, V_j] = 0$（因 $V_1,\cdots,V_n$ 为在点 p 正规的，因此 $[\bar{V}_i, V_j] = 0$）。定理得证.

定理 3 可用来证明 Kodaira 消灭定理. 有兴趣的读者可参见[65]及[86].

§ 2.8 Neumann 算子的表示

设 M 为一 n 维 Kähler 流形，取其复局部坐标系 $\{z^1, \cdots, z^n\}$，则 Kähler 度量 h 可写为

$$ds^2 = h_{\alpha\bar{\beta}}dz^\alpha d\bar{z}^\beta. \tag{8.1}$$

为方便计，今后我们记 $x^{n+\alpha} = y^\alpha$，即有

$$z^\alpha = x^\alpha + \sqrt{-1}\,x^{n+\alpha}.$$

令

$$e^\alpha_k = \delta^\alpha_k + \sqrt{-1}\,\delta^{n+\alpha}_k, \quad e^k_\alpha = \delta^k_\alpha - \sqrt{-1}\,\delta^k_{n+\alpha}, \tag{8.2}$$

其中希腊字母 α, β…变化范围为1，…，n. 小写英文字母 i, j, …取值范围为1，…，n, $n+1$，…，$2n$.

引理1

$$e^\alpha_k e^k_\beta = 2\delta^\alpha_\beta, \tag{8.3}$$

$$z^\alpha = e^\alpha_k x^k, \tag{8.4}$$

$$x^k = \frac{1}{2}[e^k_\alpha z^\alpha + \overline{e^k_\alpha z^\alpha}]. \tag{8.5}$$

引理1中的(8.3)和(8.4)容易验证，我们仅验证(8.5)

事实上

$$\begin{aligned}e^k_\alpha z^\alpha &= [\delta^k_\alpha - \sqrt{-1}\delta^k_{n+\alpha}][x^\alpha + \sqrt{-1}x^{n+\alpha}]\\ &= \delta^k_\alpha x^\alpha + \delta^k_{n+\alpha}x^{n+\alpha} + \sqrt{-1}x^{n+\alpha}\delta^k_\alpha\\ &\quad - \sqrt{-1}x^\alpha\delta^k_{n+\alpha},\end{aligned}$$

因此

$$\frac{1}{2}[e^k_\alpha z^\alpha + \overline{e^k_\alpha z^\alpha}] = \delta^k_\alpha x^\alpha + x^{n+\alpha}\delta^k_{n+\alpha} = x^k.$$

另外，我们还有

$$\frac{\partial}{\partial z^\alpha} = \frac{1}{2}e^k_\alpha\frac{\partial}{\partial x^k}, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} = \frac{1}{2}\overline{e^k_\alpha}\frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{8.6}$$

设$\{\tilde{z}^1, \cdots, \tilde{z}^n\}$为 M 的另一局部复坐标系，它们间的全纯变换为 $\tilde{z}^\alpha = f^\alpha(z^1, \cdots, z^n)$, $\alpha = 1, \cdots, n$. 则由 Cauchy-Riemann 方程得

$$e^\beta_k \cdot \frac{\partial \tilde{z}^\alpha}{\partial z^\beta} = e^\alpha_l \cdot \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^k}, \tag{8.7}$$

$$e^k_\beta \cdot \frac{\partial \tilde{z}^\beta}{\partial z^\alpha} = e^l_\alpha \cdot \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^l}. \tag{8.8}$$

引理2

$$\delta^{1\cdots\cdots 2n}_{k_1\cdots k_p l_1\cdots l_{2n-p}} e^{k_1}_{\lambda_1}\cdots e^{k_p}_{\lambda_p} \bar{e}^{l_1}_{\mu_1}\cdots \bar{e}^{l_{2n-p}}_{\mu_{2n-p}}$$

$$=\begin{cases} 0, & p\neq n \\ (2\sqrt{-1})^n \delta^{1\cdots n}_{\lambda_1\cdots\lambda_n}\delta^{1\cdots n}_{\mu_1\cdots\mu_n}, & p=n \end{cases}$$

证明：由于

$$\delta^{1\cdots\cdots 2n}_{k_1\cdots k_p l_1\cdots l_{2n-p}} e^{k_1}_{\lambda_1}\cdots e^{k_p}_{\lambda_p} \bar{e}^{l_1}_{\mu_1}\cdots \bar{e}^{l_{2n-p}}_{\mu_{2n-p}}$$

$$=\det\begin{vmatrix} e^1_{\lambda_1}\cdots\cdots e^{2n}_{\lambda_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ e^1_{\lambda_p}\cdots\cdots e^{2n}_{\lambda_p} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{e}^1_{\mu_1}\cdots\cdots \bar{e}^{2n}_{\mu_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{e}^1_{\mu_{2n-p}}\cdots\cdots \bar{e}^{2n}_{\mu_{2n-p}} \end{vmatrix} \tag{8.9}$$

若 $p>n$，则由 1 至 n 的指标 $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ 必有其中两个相同者，即行列式(8.9)中有两行相同，故为 0．若 $p<n$，则 $\mu_1, \cdots, \mu_{2n-p}$ 中至少有两个相同，因此行列式(8.9)也为 0．总之 $p\neq n$ 时，行列式(8.9)为 0．

$p=n$ 时，若 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 中有与 $\mu_1, \cdots, \mu_n$ 相同的话，则行列式(8.9)亦为 0．因此我们仅需考虑 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 和 $\mu_1, \cdots, \mu_n$ 均为 1，…，n 的排列的情形即可．我们对行列式(8.9)前 n 行进行调换，使得 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 换成次序 1，…，n．由于每两行互换相差一个负号，所以总共差一个因子 $\delta^{1\cdots n}_{\lambda_1\cdots\lambda_n}$．同法把 $\mu_1, \cdots, \mu_n$ 换成次序 1，…，n，又差一个因子 $\delta^{1\cdots n}_{\mu_1\cdots\mu_n}$．故得

$$\delta^{1\cdots\cdots 2n}_{k_1\cdots k_n l_1\cdots l_n} e^{k_1}_{\lambda_1}\cdots e^{k_n}_{\lambda_n} \bar{e}^{l_1}_{\mu_1}\cdots \bar{e}^{l_n}_{\mu_n}$$

$$= \det \begin{vmatrix} e_1^1 \cdots\cdots\cdots e_1^{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n^1 \cdots\cdots\cdots e_n^{2n} \\ \bar{e}_1^1 \cdots\cdots\cdots \bar{e}_1^{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{e}_n^1 \cdots\cdots\cdots \bar{e}_n^{2n} \end{vmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} I & I \\ -\sqrt{-1}I & \sqrt{-1}I \end{pmatrix} \delta^{1\cdots n}_{\lambda_1\cdots\lambda_n} \delta^{1\cdots n}_{\mu_1\cdots\mu_n}$$

$$= (2\sqrt{-1})^n \delta^{1\cdots n}_{\lambda_1\cdots\lambda_n} \delta^{1\cdots n}_{\mu_1\cdots\mu_n}.$$

引理证毕.

我们把 M 视为 $2n$ 维微分流形，其 Riemann 度量 g 由 Kähler 度量 h 的实部给出，即

$$g = 2\,\mathrm{Re}h = 2\,\mathrm{Re}(h_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha d\bar{z}^\beta)$$

$$= 2\,\mathrm{Re}[h_{\alpha\bar{\beta}} e^\alpha_j \bar{e}^\beta_k dx^j dx^k] = [h_{\alpha\bar{\beta}} e^\alpha_j \bar{e}^\beta_k + \bar{h}_{\alpha\bar{\beta}} \bar{e}^\alpha_j e^\beta_k] dx^j dx^k$$

$$= (h_{\alpha\bar{\beta}} e^\alpha_j \bar{e}^\beta_k + h_{\alpha\bar{\beta}} e^\alpha_k \bar{e}^\beta_j) dx^j dx^k, \tag{8.10}$$

即
$$g_{jk} = [h_{\alpha\bar{\beta}} e^\alpha_j \bar{e}^\beta_k + h_{\alpha\bar{\beta}} e^\alpha_k \bar{e}^\beta_j]. \tag{8.11}$$

记 $G = (g_{jk})_{1 \leqslant j,k \leqslant 2n}, g = \det G$，(8.11)用矩阵表示为

$$G = E\begin{bmatrix} H & O \\ O & H \end{bmatrix}\bar{E}^T, \tag{8.12}$$

其中

$$H = (h_{\alpha\bar{\beta}})_{1 \leqslant \alpha,\beta \leqslant n},$$

$$\bar{E}^T = \begin{vmatrix} e_1^1 \cdots\cdots e_1^{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n^1 \cdots\cdots e_n^{2n} \\ \bar{e}_1^1 \cdots\cdots \bar{e}_1^{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{e}_n^1 \cdots\cdots \bar{e}_n^{2n} \end{vmatrix}.$$

对于 M 上的 (r,s) 型微分形式 $\omega_{(r,s)}$，局部地可表为

$$\omega_{(r,s)}=\frac{1}{r!s!}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s}dz^{\alpha_1}\wedge\cdots$$

$$\wedge dz^{\alpha_r}\wedge d\bar{z}^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\beta_s}. \tag{8.13}$$

由关系式 $dz^\alpha=e_k^\alpha dx^k$，$d\bar{z}^\alpha=\bar{e}_k^\alpha dx^k$ 得

$$\omega_{(r,s)}=\frac{1}{(r+s)!}\omega_{j_1\cdots j_{r+s}}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_{r+s}}, \tag{8.14}$$

其中

$$\omega_{j_1\cdots j_p}=\frac{1}{r!s!}\delta^{k_1\cdots k_p}_{j_1\cdots j_p}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s}e^{\alpha_1}_{k_1}\cdots e^{\alpha_r}_{k_r}\bar{e}^{\beta_1}_{k_{r+1}}$$

$$\cdots\bar{e}^{\beta_s}_{k_p},$$

$$p=r+s.$$

自然可把 $\omega_{(r,s)}$视为 Riemann 流形 M 上的 p 次外微分形式，那么我们就可以利用 Riemann 几何中 * 算子的表达式（第一章(7.5)式）写出 $*\omega_{(r,s)}$的表达式.

首先，我们注意到下面一个事实：

$$E\bar{E}^T=2I. \tag{8.15}$$

实际上

$$E\bar{E}^T=\begin{bmatrix}\bar{e}^1_1\cdots\bar{e}^1_n & e^1_1\cdots & e^1_n\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \bar{e}^i_1\cdots\bar{e}^i_n & e^i_1\cdots & e^i_n\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \bar{e}^{2n}_1\cdots\bar{e}^{2n}_n & e^{2n}_1\cdots & e^{2n}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^1_1\cdots e^j_1\cdots e^{2n}_1\\ \cdots\\ e^1_n\cdots e^j_n\cdots e^{2n}_n\\ \bar{e}^1_1\cdots\bar{e}^j_1\cdots\bar{e}^{2n}_1\\ \cdots\\ \bar{e}^1_n\cdots\bar{e}^j_n\cdots\bar{e}^{2n}_n\end{bmatrix}$$

$2n\times2n$ 矩阵$E\bar{E}^T$ 的第(i, j)个元素为

$$\sum_{\alpha}\bar{e}_{\alpha}^{i}e_{\alpha}^{j}+\sum_{\alpha}e_{\alpha}^{i}\bar{e}_{\alpha}^{j}=2\mathrm{Re}\sum_{\alpha}\bar{e}_{\alpha}^{i}e_{\alpha}^{j}.$$

又因为$\bar{e}_{\alpha}^{i}=e_{i}^{\alpha}$，于是

$$2\mathrm{Re}\sum_{\alpha}\bar{e}_{\alpha}^{i}e_{\alpha}^{j}=2\mathrm{Re}\sum_{\alpha=1}^{n}e_{i}^{\alpha}e_{\alpha}^{j}$$

$$=2\left[\sum_{\alpha=1}^{n}\delta_{i}^{\alpha}\delta_{\alpha}^{j}+\sum_{\alpha=1}^{n}\delta_{i}^{\alpha^{*}}\delta_{n+\alpha}^{j}\right]=2\delta_{j}^{i}$$

因此有

$$E\bar{E}^{T}=2I_{2n\times 2n}.$$

由(8.12)式及(8.15)式得

$$G^{-1}E=\frac{1}{2}E\begin{pmatrix}H^{-1} & O\\ O & \bar{H}^{-1}\end{pmatrix},\tag{8.16}$$

即
$$g^{kl}e_{l}^{\alpha}=\frac{1}{2}\bar{e}_{\beta}^{k}h^{\alpha\bar{\beta}}.\tag{8.17}$$

据(8.12)式，有

$$g=\det G=\det H\cdot\det\bar{H}\cdot\det(E\bar{E}^{T})$$
$$=[\det H]^{2}\cdot 2^{2n}=h^{2}\cdot 2^{2n}.\tag{8.18}$$

命题 1 对于任何 M 上的$(r,\ s)$微分形式

$$\omega=\omega_{(r,s)}=\frac{1}{r!s!}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s}dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_r}$$
$$\wedge d\bar{z}^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\beta_s}$$

有

$$*\omega=\frac{(-1)^{nr}(\sqrt{-1})^{n}}{(n-r)!(n-s)!r!s!}hh^{\alpha_1\bar{\lambda}_1}\cdots h^{\alpha_r\bar{\lambda}_r}h^{\mu_1\bar{\beta}_1}\cdots h^{\mu_s\bar{\beta}_s}$$
$$\times\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s}\delta^{1\cdots\cdots n}_{\mu_1\cdots\mu_s\sigma_1\cdots\sigma_{n-s}}\delta^{1\cdots\cdots n}_{\lambda_1\cdots\lambda_r\tau_1\cdots\tau_{n-r}}dz^{\sigma_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\sigma_{n-s}}$$
$$\wedge d\bar{z}^{\tau_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\tau_{n-r}},$$

其中 $h=\det H$. (8.19)

证明:

$$*\omega = *\left[\frac{1}{(r+s)!r!s!}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s}\delta^{k_1\cdots k_{r+s}}_{j_1\cdots j_{r+s}}e^{\alpha_1}_{k_1}\cdots e^{\alpha_r}_{k_r}\right.$$

$$\left.\cdot\bar{e}^{\beta_1}_{k_{r+1}}\cdots\bar{e}^{\beta_s}_{k_{r+s}}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_{r+s}}\right]$$

$$=\frac{1}{(2n-r-s)!(r+s)!}\cdot 2^n\cdot h\cdot\delta^{1\cdots\cdots 2n}_{m_1\cdots m_{r+s}k_1\cdots k_{2n-r-s}}$$

$$\cdot g^{l_1m_1}\cdots g^{l_{r+s}m_{r+s}}$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{r!s!}\delta^{i_1\cdots i_r j_1\cdots j_s}_{l_1\cdots\cdots l_{r+s}}\cdot\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s}e^{\alpha_1}_{i_1}\cdots e^{\alpha_r}_{i_r}\bar{e}^{\beta_1}_{j_1}\cdots\right.$$

$$\left.\bar{e}^{\beta_s}_{j_s}\right\}dx^{k_1}\wedge\cdots\wedge dx^{k_{2n-r-s}}. \tag{8.20}$$

下面我们利用关系式(8.17)计算

$$\delta^{i_1\cdots i_r j_1\cdots j_s}_{l_1\cdots l_{r+s}}g^{l_1m_1}\cdots g^{l_{r+s}m_{r+s}}e^{\alpha_1}_{i_1}\cdots e^{\alpha_r}_{i_r}\bar{e}^{\beta_1}_{j_1}\cdots\bar{e}^{\beta_s}_{j_s}$$

$$=\det\begin{vmatrix} g^{i_1m_1} & \cdots g^{i_rm_1} & g^{j_1m_1} & \cdots & g^{j_sm_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ g^{i_1m_r} & \cdots g^{i_rm_r} & g^{j_1m_r} & \cdots & g^{j_sm_r}\\ g^{i_1m_{r+1}} & \cdots g^{i_rm_{r+1}} & g^{j_1m_{r+1}} & \cdots & g^{j_sm_{r+1}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ g^{i_1m_{r+s}} & \cdots g^{i_rm_{r+s}} & g^{j_1m_{r+s}} & \cdots & g^{j_sm_{r+s}}\end{vmatrix}$$

$$\cdot\det\begin{pmatrix} e^{\alpha_1}_{i_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & e^{\alpha_r}_{i_r} & & \\ & & & \bar{e}^{\beta_1}_{j_1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \bar{e}^{\beta_s}_{j_s}\end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{bmatrix} g^{i_1m_1}e^{\alpha_1}_{i_1} & \cdots & g^{i_rm_1}e^{\alpha_r}_{i_r} & g^{j_1m_1}\bar{e}^{\beta_1}_{j_1} & \cdots & g^{j_sm_1}\bar{e}^{\beta_s}_{j_s}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ g^{i_1m_{r+s}}e^{\alpha_1}_{i_1} & \cdots & g^{i_rm_{r+s}}e^{\alpha_r}_{i_r} & g^{j_1m_{r+s}}\bar{e}^{\beta_1}_{j_1} & \cdots & g^{j_sm_{r+s}}\bar{e}^{\beta_s}_{j_s}\end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} \bar{e}^{m_1}_{\lambda_1} h^{\alpha_1\bar{\lambda}_1} \cdots & \bar{e}^{m_1}_{\lambda_r} h^{\alpha_r\bar{\lambda}_r} & e^{m_1}_{\mu_1} h^{\mu_1\bar{\beta}_1} & \cdots e^{m_1}_{\mu_s} h^{\mu_s\bar{\beta}_s} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \bar{e}^{m_{r+s}}_{\lambda_1} h^{\alpha_1\bar{\lambda}_1} \cdots & \bar{e}^{m_{r+s}}_{\lambda_r} h^{\alpha_r\bar{\lambda}_r} & e^{m_{r+s}}_{\mu_1} h^{\mu_1\bar{\beta}_1} & \cdots e^{m_{r+s}}_{\mu_s} h^{\mu_s\bar{\beta}_s} \end{bmatrix}$$

$$\times 2^{-r-s}$$

$$= 2^{-(r+s)} h^{\alpha_1\bar{\lambda}_1} \cdots h^{\alpha_r\bar{\lambda}_r} h^{\mu_1\bar{\beta}_1} \cdots h^{\mu_s\bar{\beta}_s} \cdot \det \begin{bmatrix} \bar{e}^{m_1}_{\lambda_1} \cdots & \bar{e}^{m_1}_{\lambda_r} & e^{m_1}_{\mu_1} \cdots & e^{m_1}_{\mu_s} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \bar{e}^{m_{r+s}}_{\lambda_1} \cdots & \bar{e}^{m_{r+s}}_{\lambda_r} & e^{m_{r+s}}_{\mu_1} \cdots & e^{m_{r+s}}_{\mu_s} \end{bmatrix}$$

$$= 2^{-(r+s)} h^{\alpha_1\bar{\lambda}_1} \cdots h^{\alpha_r\bar{\lambda}_r} h^{\mu_1\bar{\beta}_1} \cdots h^{\mu_s\bar{\beta}_s} \delta^{m_1\cdots m_{r+s}}_{l_1\cdots l_{r+s}} \bar{e}^{l_1}_{\lambda_1} \cdots \bar{e}^{l_r}_{\lambda_r} e^{l_{r+1}}_{\mu_1} \cdots e^{l_{r+s}}_{\mu_s}. \tag{8.21}$$

将(8.21)代入(8.20)式， 并利用 $dx^k = (e^k_\alpha dz^\alpha + \bar{e}^k_\alpha d\bar{z}^\alpha)/2$ 得

$$*\omega = \frac{2^n \cdot h \cdot 2^{-(r+s)}}{(2n-r-s)!\, r!\, s!\, (r+s)!} h^{\alpha_1\bar{\lambda}_1} \cdots h^{\alpha_r\bar{\lambda}_r} h^{\mu_1\bar{\beta}_1} \cdots h^{\mu_s\bar{\beta}_s}$$

$$\cdot \omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s} \{ \bar{e}^{l_1}_{\lambda_1} \cdots \bar{e}^{l_r}_{\lambda_r} e^{l_{r+1}}_{\mu_1} \cdots e^{l_{r+s}}_{\mu_s} \delta^{m_1\cdots m_{r+s}}_{l_1\cdots l_{r+s}}$$

$$\cdot \delta^{1\cdots\cdots 2n}_{m_1\cdots m_{r+s} k_1\cdots k_{2n-r-s}} \} dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_{2n-r-s}}$$

$$= \frac{2^{n-r-s}}{r!\, s!} h h^{\alpha_1\bar{\lambda}_1} \cdots h^{\alpha_r\bar{\lambda}_r} h^{\mu_1\bar{\beta}_1} \cdots h^{\mu_s\bar{\beta}_s} \omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s}$$

$$\cdot \left\{ \frac{1}{(2n-r-s)!} \bar{e}^{l_1}_{\lambda_1} \cdots \bar{e}^{l_r}_{\lambda_r} e^{l_{r+1}}_{\mu_1} \cdots e^{l_{r+s}}_{\mu_s} \delta^{1\cdots\cdots 2n}_{l_1\cdots l_{r+s} k_1\cdots k_{2n-r-s}} \right\}$$

$$\cdot \frac{1}{2^{2n-r-s}} (e^{k_1}_{\sigma_1} dz^{\sigma_1} + \bar{e}^{k_1}_{\sigma_1} d\bar{z}^{\sigma_1}) \wedge \cdots \wedge (e^{k_{2n-r-s}}_{\sigma_{2n-r-s}} dz^{\sigma_{2n-r-s}}$$

$$+ \bar{e}^{k_{2n-r-s}}_{\sigma_{2n-r-s}} d\bar{z}^{\sigma_{2n-r-s}}).$$

由引理 2，上式中 dz^σ 之次数必须为 $n-s$，否则为 0，而且 dz^σ 为 $n-s$ 次的项数共有

$$C^{2n-r-s}_{n-s} = \frac{(2n-r-s)!}{(n-r)!\,(n-s)!}.$$

记

$$\omega^{\bar{\lambda}_1\cdots\bar{\lambda}_r\mu_1\cdots\mu_s} = h^{\alpha_1\bar{\lambda}_1} \cdots h^{\alpha_r\bar{\lambda}_r} h^{\mu_1\bar{\beta}_1} \cdots h^{\mu_s\bar{\beta}_s}$$

$\cdot\,\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_n}$.

据引理 2，我们有

$$
\begin{aligned}
*\omega = & \frac{h}{2^n(n-r)!\,(n-s)!\,r!\,s!}\,\omega^{\bar\lambda_1\cdots\bar\lambda_r\mu_1\cdots\mu_s} \\
& \cdot\delta^{1\cdots\cdots 2n}_{l_1\cdots l_{r+s}k_1\cdots k_{2n-r-s}} \\
& \cdot\bar e^{l_1}_{\lambda_1}\cdots\bar e^{l_r}_{\lambda_r}e^{l_{r+1}}_{\mu_1}\cdots e^{l_{r+s}}_{\mu_s}\,e^{k_1}_{\sigma_1}\cdots e^{k_{n-s}}_{\sigma_{n-s}}\cdot\bar e^{k_{n-s+1}}_{\tau_1} \\
& \cdots\bar e^{k_{2n-r-s}}_{\tau_{n-r}}\cdot dz^{\sigma_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\sigma_{n-s}}\wedge d\bar z^{\tau_1}\wedge\cdots \\
& \wedge d\bar z^{\tau_{n-r}} \\
= & \frac{(-1)^{nr}\cdot h\cdot 2^{-n}}{(n-r)!\,(n-s)!\,r!\,s!}\,\omega^{\bar\lambda_1\cdots\bar\lambda_r\mu_1\cdots\mu_s} \\
& \cdot\delta^{1\cdots n\cdots 2n}_{l_{r+1}\cdots l_{r+s}k_1\cdots k_{n-s}l_1\cdots l_r k_{n-s+1}\cdots k_{2n-r-s}} \\
& \cdot e^{l_{r+1}}_{\mu_1}\cdots e^{l_{r+s}}_{\mu_s}\,e^{k_1}_{\sigma_1}\cdots e^{k_{n-s}}_{\sigma_{n-s}}\,\bar e^{l_1}_{\lambda_1}\cdots\bar e^{l_r}_{\lambda_r}\bar e^{k_{n-s+1}}_{\tau_1} \\
& \cdots\bar e^{k_{2n-r-s}}_{\tau_{n-r}}\,dz^{\sigma_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\sigma_{n-s}}\wedge d\bar z^{\tau_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z^{\tau_{n-r}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= & \frac{(\sqrt{-1})^n(-1)^{nr}}{(n-r)!\,(n-s)!\,r!\,s!}\,h\omega^{\bar\lambda_1\cdots\bar\lambda_r\mu_1\cdots\mu_s}\delta^{1\cdots\cdots n}_{\mu_1\cdots\mu_s\sigma_1\cdots\sigma_{n-s}} \\
& \cdot\delta^{1\cdots\cdots n}_{\lambda_1\cdots\lambda_r\tau_1\cdots\tau_{n-r}}\,dz^{\sigma_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\sigma_{n-s}}\wedge d\bar z^{\tau_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z^{\tau_{n-r}}.
\end{aligned}
$$

命题 1 证毕.

我们知道 Kähler 流形 (M,h) 上存在唯一复度量联络 D，并且它与 Riemann 度量 $g=2\mathrm{Re}h$ 所决定的 Riemann 联络 ∇ 相同. 据 § 2.5 定理 3，我们有

$$
\begin{aligned}
&\nabla_\lambda\left(\frac{\partial}{\partial z^\beta}\right)=\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}\,\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, && \nabla_\lambda\left(\frac{\partial}{\partial\bar z^\beta}\right)=0, \\
&\nabla_\lambda(dz^\beta)=-\Gamma^\beta_{\lambda\alpha}\,dz^\alpha, && \nabla_\lambda(d\bar z^\beta)=0, \\
&\nabla_{\bar\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial\bar z^\beta}\right)=\bar\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}\,\frac{\partial}{\partial\bar z^\alpha}, && \nabla_{\bar\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial z^\beta}\right)=0,
\end{aligned}
\qquad (8.22)
$$

$$\nabla_{\bar{\lambda}}(d\bar{z}^{\beta}) = -\bar{\Gamma}^{\beta}_{\lambda\alpha} d\bar{z}^{\alpha}, \qquad \nabla_{\bar{\lambda}}(dz^{\beta}) = 0.$$

其中 $\nabla_{\lambda} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial z^{\lambda}}}$， $\nabla_{\bar{\lambda}} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\lambda}}}$，

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = h^{\lambda\bar{\mu}} \frac{\partial h_{\beta\bar{\mu}}}{\partial z^{\alpha}} = h^{\lambda\bar{\mu}} \frac{\partial h_{\alpha\bar{\mu}}}{\partial z^{\beta}} = \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}.$$

对于张量场 $\xi^{\alpha}\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}$，$\xi^{\alpha}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}}$，$\varphi_{\alpha} dz^{\alpha}$，$\varphi_{\bar{\alpha}} d\bar{z}^{\alpha}$，我们有

$$\nabla_{\lambda}\left(\xi^{\alpha}\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}\right) = \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial z^{\lambda}}\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} + \xi^{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\lambda\alpha}\frac{\partial}{\partial z^{\beta}}$$

$$= (\partial_{\lambda}\xi^{\alpha} + \xi^{\beta}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta})\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} = \xi^{\alpha}_{;\lambda}\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}},$$

其中 $\xi^{\alpha}_{;\lambda} = \nabla_{\lambda}\xi^{\alpha} = \partial_{\lambda}\xi^{\alpha} + \xi^{\beta}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta}$， $\partial_{\lambda} \frac{\partial}{\partial z^{\lambda}}$

因此我们有

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\lambda}\xi^{\alpha} = \xi^{\alpha}_{;\lambda} \equiv \partial_{\lambda}\xi^{\alpha} + \Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha}\xi^{\beta}, \\
&\nabla_{\lambda}\bar{\xi}^{\alpha} = \bar{\xi}^{\alpha}{}_{,\lambda} = \partial_{\lambda}\bar{\xi}^{\alpha}, \\
&\nabla_{\lambda}\varphi_{\alpha} = \partial_{\lambda}\varphi_{\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\lambda\alpha}\varphi_{\beta} = \varphi_{\alpha;\lambda}, \\
&\nabla_{\lambda}\varphi_{\bar{\alpha}} = \partial_{\lambda}\varphi_{\bar{\alpha}}.
\end{aligned} \tag{8.23}$$

同法可写出 $\Delta_{\bar{\lambda}}\xi^{\alpha}$ 等. 自然地可把上述基本公式推广到高阶张量场的协变微分. 例如有

命题 2 对于度量张量 $h_{\alpha\bar{\beta}}$，有

$$\nabla_{\lambda} h_{\alpha\bar{\beta}} = h_{\alpha\bar{\beta},\lambda} = 0, \qquad \nabla_{\lambda} h^{\alpha\bar{\beta}} = h^{\alpha\bar{\beta}}{}_{,\lambda} = 0.$$

实际上，由定义

$$\begin{aligned}
k_{\alpha\bar{\beta},\lambda} &= \partial_{\lambda} h_{\alpha\bar{\beta}} - \Gamma^{\gamma}_{\lambda\alpha} h_{\gamma\bar{\beta}} - \Gamma^{\bar{\gamma}}_{\lambda\bar{\beta}} h_{\alpha\bar{\gamma}} \\
&= \partial_{\lambda} h_{\alpha\bar{\beta}} - \Gamma^{\gamma}_{\lambda\alpha} h_{\gamma\bar{\beta}} \\
&= \partial_{\lambda} h_{\alpha\bar{\beta}} - (\partial_{\lambda} h_{\alpha\bar{\tau}}) h^{\gamma\bar{\tau}} h_{\gamma\bar{\beta}}
\end{aligned}$$

$$=\partial_\lambda h_{\alpha\bar\beta}-(\partial_\lambda h_{\alpha\bar l})\delta_{l\beta}$$
$$=\partial_\lambda h_{\alpha\bar\beta}-\partial_\lambda h_{\alpha\bar\beta}=0.$$

另外由 $h_{\alpha\bar\beta}h^{\gamma\bar\beta}=\delta_{\alpha\gamma}$ 易得 $\nabla_\lambda h^{\alpha\bar\beta}=h^{\alpha\bar\beta}{}_{;\lambda}=0$. 同法亦可得 $h_{\alpha\bar\beta,\bar\lambda}=h^{\alpha\bar\lambda}{}_{,\bar\lambda}=0$.

由于对高阶张量场 S 我们可以定义其协变微分 $\nabla_X S$，因此 $R(X, Y)S$ 是定义好的. 对于张量场 S, T, 容易验证下述关系式

$$R(X, Y)(S\otimes T)=R(X, Y)S\otimes T+S\otimes R(X, Y)T. \tag{8.24}$$

对于 M 上任何(r,s)微分形式

$$\begin{aligned}\omega&=\omega_{(r,s)}\\&=\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s}dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_r}\wedge d\bar z^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z^{\beta_s}.\end{aligned}$$

据§2.6命题4，我们有

$$\begin{aligned}&\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s;\lambda\mu}=\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s;\mu\lambda},\\&\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s;\bar\lambda\bar\mu}=\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s;\bar\mu\bar\lambda},\end{aligned}\tag{8.25}$$

及

$$\begin{aligned}&\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s;\bar\mu\lambda}-\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s;\lambda\bar\mu}\\&=-\sum_{i=1}^{r}R^{l_i}_{\alpha_i\lambda\bar\mu}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_{i-1}l_i\alpha_{i+1}\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s}\\&\quad+\sum_{i=1}^{s}R^{\bar\tau_i}_{\bar\beta_i\lambda\bar\mu}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_{i-1}\bar\tau_i\bar\beta_{i+1}\cdots\bar\beta_s}.\end{aligned}\tag{8.26}$$

(8.25)两式是由 $R\left(\frac{\partial}{\partial z^\lambda}, \frac{\partial}{\partial z^\mu}\right)=0$ 而得的. 这里仅以(8.26)为例加以验证.

由于

$$R\left(\frac{\partial}{\partial z^{\lambda}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\mu}}\right)\omega = [\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s,\bar{\mu}\lambda} - \omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s,\lambda\bar{\mu}}]$$

$$\cdot dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\beta_s} \tag{8.27}$$

另外

$$R\left(\frac{\partial}{\partial z^{\lambda}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\mu}}\right)\omega = \left[R\left(\frac{\partial}{\partial z^{\lambda}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\mu}}\right)\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s}\right]$$

$$\cdot dz^1\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\beta_s} + \sum_{i}^{r}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s}dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_{i-1}}$$

$$\wedge R\left(\frac{\partial}{\partial z^{\lambda}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\mu}}\right)dz^{\alpha_i}\wedge dz^{\alpha_{i+1}}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_r}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\beta_s}$$

$$+\sum_{i+1}^{s}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s}dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_r}\wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\beta_{i-1}}$$

$$\wedge R\left(\frac{\partial}{\partial z^{\lambda}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\mu}}\right)d\bar{z}^{\beta_i}\wedge d\bar{z}^{\beta_{i+1}}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\beta_s}. \tag{8.28}$$

由于
$$R\left(\frac{\partial}{\partial z^{\lambda}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\mu}}\right)dz^{\alpha} = -R^{\alpha}_{\beta\lambda\bar{\mu}}dz^{\beta}$$

以及
$$R\left(\frac{\partial}{\partial z^{\lambda}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\mu}}\right)dz^{\beta} = +R^{\bar{\beta}}_{\bar{\tau}\lambda\bar{\mu}}d\bar{z}^{\tau},$$

于是我们有

$$R\left(\frac{\partial}{\partial z^{\lambda}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\mu}}\right)\omega = \left\{-\sum_{i=1}^{r}R^{ti}_{\alpha_i\lambda\bar{\mu}}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_{i-1}t\alpha_{i+1}\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\beta_s}\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{s}R^{\bar{\tau}}_{\bar{\beta}_i\lambda\bar{\mu}}\,\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_{i-1}\bar{\tau}\bar{\beta}_{i+1}\cdots\bar{\beta}_s}\right\}$$

$$\cdot dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_r}\wedge d\bar{z}^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\beta_s}.$$

此式即(8.26)式，我们称它为 Ricci 恒等式．对于一般的张

量场也有相应的 Ricci 等式，证明完全相同.

命题 3 设 Kähler 流形上的(r,s)型微分形式

$$\omega=\frac{1}{r!s!}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s}dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_r}\wedge d\bar z^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z^{\beta_s},$$

则有

(1) $$\bar\partial\omega=\frac{1}{r!s!}\sum_{\lambda}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s;\bar\lambda}\cdot d\bar z^{\lambda}\wedge dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_r}\wedge d\bar z^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z^{\beta_s}.$$

(2) $$\partial\omega=\frac{1}{r!s!}\sum_{\lambda}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s;\lambda}\cdot dz^{\lambda}\wedge dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_r}\wedge d\bar z^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z^{\beta_s}.$$

证明：(2)证$d\bar z^B=d\bar z^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z^{\beta_s}$, $dz^A=dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_r}$.

由于

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r!s!}\sum_{\lambda}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s;\lambda}dz^{\lambda}\wedge dz^{A}\wedge dz^{B}\\&=\frac{1}{r!s!}\sum_{\lambda}\Big\{\partial_\lambda\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s}-\sum_{t=1}^{r}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\alpha_t}\\&\quad\cdot\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_{t-1}\sigma\alpha_{t+1}\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s}\Big\}dz^{\lambda}\wedge dz^{A}\wedge d\bar z^{B}.\end{aligned}$$

上式用到$\Gamma^{\bar\tau}_{\lambda\mu}=0$. 因为$\Gamma^{\sigma}_{\lambda\alpha_t}$对称及$dz^{\lambda}\wedge dz^{A}\wedge dz^{B}$反称，所以上式中除第一项$\partial_\lambda\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s}$不为零外，其余各项求和后均为零，所以有

$$\frac{1}{r!s!}\sum_{\lambda}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s;\lambda}dz^{\lambda}\wedge dz^{A}\wedge d\bar z^{B}=\partial\omega.$$

同法可证(1).

命题 3 中（1）式又可写为

$$(\bar{\partial}\omega)_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_{s+1}}=(-1)^r\sum_{l=0}^{s}(-1)^l\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\hat{\bar{\beta}}_l\cdots\bar{\beta}_s;\bar{\beta}_l},\tag{8.29}$$

其中"∧"表示去掉该项，

$$\bar{\partial}\omega=(\bar{\partial}\omega)_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s}dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_r}\wedge d\bar{z}^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\beta_s}.$$

命题 4 对 Kähler 流形 M 上的任何(r,s)式 ω 有

(1) $$\bar{\partial}^*\omega=\frac{(-1)^{r+1}}{r!(s-1)!}h^{\mu\bar{\lambda}}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\lambda}\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_{s-1};\mu}$$
$$\cdot dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_r}\wedge d\bar{z}^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\beta_{s-1}}.$$

(2) $$\partial^*\omega=\frac{-1}{(r-1)!s!}h^{\mu\bar{\lambda}}\omega_{\mu\alpha_1\cdots\alpha_{r-1}\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s;\bar{\lambda}}$$
$$dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_{r-1}}\wedge d\bar{z}^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\beta_s}.$$

证明： 由于 $\partial^*=-*\bar{\partial}*$，$\bar{\partial}^*=-*\partial*$，下面我们将证明（2），为此只须计算

$$\partial^*\omega=-*\bar{\partial}*.$$

首先据命题 1

$$*\omega=\frac{(\sqrt{-1})^n(-1)^{nr}}{(n-r)!(n-s)!r!s!}h\cdot h^{\alpha_1\bar{\lambda}_1}\cdots h^{\alpha_r\bar{\lambda}_r}h^{\mu_1\bar{\beta}_1}\cdots h^{\mu_s\bar{\beta}_s}$$
$$\cdot\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s}\delta^{1\cdots\cdots n}_{\mu_1\cdots\mu_s\sigma_{1}\cdots\sigma_{n-s}}\delta^{1\cdots\cdots n}_{\lambda_1\cdots\lambda_r\tau_1\cdots\tau_{n-r}}$$
$$\cdot dz^{\sigma_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\sigma_{n-s}}\wedge d\bar{z}^{\tau_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\tau_{n-r}}.$$

记 $$A_{\sigma_1\cdots\sigma_{n-s}\bar{\tau}_1\cdots\bar{\tau}_{n-r}}=\frac{(\sqrt{-1})^n(-1)^{nr}}{r!s!}\cdot h\cdot h^{\alpha_1\bar{\lambda}_1}\cdots h^{\alpha_r\bar{\lambda}_r}$$
$$\cdot h^{\mu_1\bar{\beta}_1}\cdots h^{\mu_s\bar{\beta}_s}\cdot\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s}\cdot\delta^{1\cdots\cdots n}_{\mu_1\cdots\mu_s\sigma_1\cdots\sigma_{n-s}}$$
$$\cdot\delta^{1\cdots\cdots n}_{\lambda_1\cdots\lambda_r\tau_1\cdots\tau_{n-r}},\tag{8.30}$$

则 $$*\omega=\frac{1}{(n-sn)!(n-r)!}A_{\sigma_1\cdots\sigma_{n-s}\bar{\tau}_1\cdots\bar{\tau}_{n-r}}$$
$$\cdot dz^{\sigma_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\sigma_{n-s}}\wedge d\bar{z}^{\tau_1}\wedge d\bar{z}^{\tau_{n-r}}.$$
据命题3中（1），我们有
$$\partial*\omega=\frac{1}{(n-s)!(n-r)!}\sum A_{\sigma_1\cdots\sigma_{n-s}\bar{\tau}_1\cdots\bar{\tau}_{n-r},\tau}$$
$$\cdot dz^{\tau}\wedge dz^{\sigma_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\sigma_{n-s}}\wedge d\bar{z}^{\tau_1}\wedge d\bar{z}^{\tau_{n-r}}$$
$$=\frac{(-1)^{n-s}}{(n-s)!(n-r)!(n-r+1)!}\delta^{\tau\tau_1\cdots\tau_{n-r}}_{\gamma_1\cdots\gamma_{n-r+1}}$$
$$\cdot A_{\sigma_1\cdots\sigma_{n-s}\bar{\tau}_1\cdots\bar{\tau}_{n-r},\tau}$$
$$\cdot dz^{\sigma_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\sigma_{n-s}}\wedge d\bar{z}^{\gamma_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\gamma_{n-r+1}}.$$
再利用命题1，得
$$*\bar{\partial}*\omega=\frac{(\sqrt{-1})^n(-1)^{n(n-s)}(-1)^{n-s}}{s!(r-1)!(n-s)!(n-r)!(n-r+1)!}h$$
$$\cdot h^{\sigma_1\bar{\xi}_1}\cdots h^{\sigma_{n-s}\bar{\xi}_{n-s}}\cdot h^{\eta_1\bar{\gamma}_1}\cdots h^{\eta_{n-r+1}\bar{\gamma}_{n-r+1}}\delta^{\tau\tau_1\cdots\tau_{n-r}}_{\gamma_1\cdots\gamma_{n-r+1}}$$
$$\cdot A_{\sigma_1\cdots\sigma_{n-s}\bar{\tau}_1\cdots\bar{\tau}_{n-r},\bar{\tau}}\cdot\delta^{1\cdots\cdots n}_{\xi_1\cdots\xi_{n-s}\delta_1\cdots\delta_s}\delta^{1\cdots\cdots n}_{\eta_1\cdots\eta_{n-r+1}\chi_1\cdots\chi_{r-1}}$$
$$\cdot dz^{\chi_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\chi_{r-1}}\wedge d\bar{z}^{\delta_1}\wedge d\bar{z}^{\delta_s}. \tag{8.31}$$
由(8.30)式，我们有
$$h\cdot h^{\sigma_1\bar{\xi}_1}\cdots h^{\sigma_{n-s}\bar{\xi}_{n-s}}h^{\eta_1\bar{\gamma}_1}\cdots h^{\eta_{n-r+1}\bar{\gamma}_{n-r+1}}\delta^{\tau\tau_1\cdots\tau_{n-r}}_{\gamma_1\cdots\gamma_{n-r+1}}$$
$$\cdot A_{\sigma_1\cdots\sigma_{n-s}\bar{\tau}_1\cdots\bar{\tau}_{n-r},\bar{\tau}}\delta^{1\cdots\cdots n}_{\xi_1\cdots\xi_{n-s}\delta_1\cdots\delta_s}\cdot\delta^{1\cdots\cdots n}_{\eta_1\cdots\eta_{n-r+1}\chi_1\cdots\chi_{r-1}}$$
$$=\frac{(\sqrt{-1})^n(-1)^{nr}}{r!s!}h\cdot h^{\sigma_1\bar{\xi}_1}\cdots h^{\sigma_{n-s}\bar{\xi}_{n-s}}h^{\eta_1\bar{\gamma}_1}\cdots h^{\eta_{n-r+1}\bar{\gamma}_{n-r+1}}$$
$$\cdot\delta^{\tau\tau_1\cdots\tau_{n-r}}_{\gamma_1\cdots\gamma_{n-r+1}}\cdot h\cdot h^{\alpha_1\bar{\lambda}_1}\cdots h^{\alpha_r\bar{\lambda}_r}\cdot h^{\mu_1\bar{\beta}_1}\cdots h^{\mu_s\bar{\beta}_s}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s,\bar{\tau}}$$
$$\delta^{1\cdots\cdots n}_{\mu_1\cdots\mu_s\sigma_1\cdots\sigma_{n-s}}\cdot\delta^{1\cdots\cdots n}_{\lambda_1\cdots\lambda_r\tau_1\cdots\tau_{n-r}}\cdot\delta^{1\cdots\cdots n}_{\xi_1\cdots\xi_{n-s}\delta_1\cdots\delta_s}\cdot\delta^{1\cdots\cdots n}_{\eta_1\cdots\eta_{n-r+1}\chi_1\cdots\chi_{r-1}}$$

$$= \frac{(\sqrt{-1})^n(-1)^{nr}(n-r+1)!}{r!s!} h^2 [h^{\eta_1\bar{\tau}_1} \cdots h^{\eta_{n-r+1}\bar{\tau}_{n-r+1}}$$

$$\cdot h^{\alpha_1\bar{\lambda}_1} \cdots h^{\alpha_r\bar{\lambda}_r} \delta^{1 \cdots \cdots n}_{\lambda_1 \cdots \lambda_r \tau_1 \cdots \tau_{n-r}}] \cdot [h^{\sigma_1\bar{\xi}_1} \cdots h^{\sigma_{n-s}\bar{\xi}_{n-s}} h^{\mu_1\bar{\beta}_1} \cdots h^{\mu_s\bar{\beta}_s}$$

$$\cdot \delta^{1 \cdots \cdots n}_{\mu_1 \cdots \mu_s \sigma_1 \cdots \sigma_{n-s}}] \cdot \delta^{1 \cdots \cdots n}_{\xi_1 \cdots \xi_{n-s} \delta_1 \cdots \delta_s} \cdot \delta^{1 \cdots \cdots n}_{\eta_1 \cdots \eta_{n-r+1} \chi_1 \cdots \chi_{r-1}} \omega_{\alpha_1 \cdots \alpha_r \bar{\beta}_1 \cdots \bar{\beta}_{s1} \bar{\tau}}$$

$$= \frac{(\sqrt{-1})^n(-1)^{nr}(n-r+1)!}{r!s!} h^2 \cdot h^{\eta_1\bar{\tau}}$$

$$\cdot \det \begin{pmatrix} h^{\alpha_1\bar{1}} \cdots\cdots & h^{\alpha_1\bar{n}} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ h^{\alpha_r\bar{1}} \cdots\cdots & h^{\alpha_r\bar{n}} \\ h^{\eta_2\bar{1}} \cdots\cdots & h^{\eta_2\bar{n}} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ h^{\eta_{n-r+1}\bar{1}} \cdots\cdots & h^{\eta_{n-r+1}\bar{n}} \end{pmatrix} \cdot \delta^{1 \cdots \cdots n}_{\eta_1 \cdots \eta_{n-r+1} \chi_1 \cdots \chi_{r-1}}$$

$$\cdot \det \begin{pmatrix} h^{1\bar{\beta}_1} \cdots\cdots & h^{n\bar{\beta}_1} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ h^{1\bar{\beta}_s} \cdots\cdots & h^{n\bar{\beta}_s} \\ h^{1\bar{\xi}_1} \cdots\cdots & h^{n\bar{\xi}_1} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ h^{1\bar{\xi}_{n-s}} \cdots\cdots & h^{n\bar{\xi}_{n-s}} \end{pmatrix} \cdot \delta^{1 \cdots \cdots n}_{\xi_1 \cdots \xi_{n-s} \delta_1 \cdots \delta_s} \omega_{\alpha_1 \cdots \alpha_r \bar{\beta}_1 \cdots \bar{\beta}_{s1} \bar{\tau}}$$

$$= \frac{(\sqrt{-1})^n(-1)^{nr}(n-r+1)!}{r!s!} h^2 \cdot h^{\eta_1\bar{\tau}} \cdot h^{-1} \cdot \delta^{\alpha_1 \cdots \alpha_r \eta_1 \cdots \eta_{n-r+1}}_{1 \cdots \cdots n}$$

$$\cdot \delta^{1 \cdots \cdots n}_{\eta_1 \cdots \eta_{n-r+1} \chi_1 \cdots \chi_{r-1}} \cdot h^{-1} \delta^{\beta_1 \cdots \beta_s \xi_1 \cdots \xi_{n-s}}_{1 \cdots \cdots n} \cdot \delta^{1 \cdots \cdots n}_{\xi_1 \cdots \xi_{n-s} \delta_1 \cdots \delta_s}$$

$$\cdot \omega_{\alpha_1 \cdots \alpha_r \bar{\beta}_1 \cdots \bar{\beta}_{s1} \bar{\tau}}$$

$$= \frac{(\sqrt{-1}^n(-1)^{nr}(u-r+1)!}{r!s!} \cdot h^{\eta_1\bar{\tau}} (-1)^{(r-1)(n-r)} (-nr)!$$

$$\cdot \delta^{\alpha_1 \cdots \alpha_r}_{\eta_1 \chi_1 \cdots \chi_{r-1}} (-1)^{s(n-s)} \cdot (n-s)! \cdot \delta^{\beta_1 \cdots \beta_s}_{\xi_1 \cdots \xi_s} \omega_{\alpha_1 \cdots \alpha_r \bar{\beta}_1 \cdots \bar{\beta}_{s1} \bar{\tau}}$$

$$= \frac{1}{r!s!} \cdot (\sqrt{-1})^n (-1)^{nr+(r-1)(n-r)+s(n-s)} \quad (n-r)!$$

$$\cdot (n-r)!(n-s)!r!s!h^{\eta_1\bar{\tau}} \cdot \omega_{\eta_1\chi_1\cdots\chi_{r-1}\bar{\delta}_1\cdots\bar{\delta}_{s_1}\bar{\tau}}$$

$$= (\sqrt{-1})^n(-1)^{n\cdot ns\cdot s}(n-r)!(n-s)!(n-r+1)!h^{\sigma\bar{\tau}}$$

$$\cdot \omega_{\sigma\chi_1\cdots\chi_{r-1}\bar{\delta}_1\cdots\bar{\delta}_{s_1}\bar{\tau}} . \tag{8.32}$$

把(8.32)式代进(8.31)式得

$$*\bar{\partial}*\omega = \frac{-1}{(r-1)!s!} h^{\mu\bar{\lambda}}\omega_{\mu\alpha_1\cdots\alpha_{r-1}\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_{s_1}\bar{\lambda}}dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge$$

$$dz^{\alpha_{r-1}}\wedge d\bar{z}^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\beta_s}.$$

命题 4 中(2)部分证毕.(1)同法可得，也可由 $\bar{\partial}^*\omega = \overline{\partial^*\bar{\omega}}$ 得到.

用张量分量的记号，命题 4 中的两个公式又可写为：

$$(1') \quad (\bar{\partial}^*\omega)_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_{s-1}} = (-1)^{r+1}h^{\mu\bar{\lambda}}\nabla_\mu\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\lambda}\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_{s-1}}$$

$$= (-1)^{r+1}h^{\mu\bar{\lambda}}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\lambda}\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_{s-1},\mu} . \tag{8.33}$$

$$(2') \quad (\partial^*\omega)_{\alpha\cdots\alpha_{r-1}\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s} = -h^{\mu\bar{\lambda}}\omega_{\mu\alpha_1\cdots\alpha_{r-1}\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_{s_1}\bar{\lambda}}. \tag{8.34}$$

最后我们给出 Kähler 流形 M 上的 Neumann 算子$\square$在任意复局部坐标系 $\{z^1,\cdots,z^n\}$ 下的表达式.

命题 5 对于 Kähler 流形 M 上的任何 (r,s) 形式

$$\omega = \frac{1}{r!s!}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s}dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_r}\wedge d\bar{z}^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\beta_s},$$

我们有

$$\square\omega = (\square\omega)_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s}dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_r}\wedge d\bar{z}^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\beta_s},$$

其中

$$(\square\omega)_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2\cdots\bar{\beta}_s}$$

$$= -h^{\alpha\bar{\beta}}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_{s_1}\bar{\beta}\alpha} + h^{\alpha\bar{\beta}}\cdot R^{l}_{\alpha_1\alpha\bar{\beta}\lambda}$$

$$\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_{\xi-1}l\alpha_{\xi+1}\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_{\lambda-1}\bar\beta\bar\beta_{\lambda+1}\cdots\bar\beta_s}-h^{\alpha\bar\beta}$$

$$\cdot R^{\bar\tau}_{\bar\beta\alpha\bar\beta_\lambda}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_{\lambda-1}\bar\tau\bar\beta_{\lambda+1}\cdots\bar\beta_s},$$

(8.35)

其中 $\quad R^{\alpha}_{\beta\gamma\bar\tau}=-\dfrac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial\bar z^{\tau}},\ \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=h^{\alpha\bar\mu}\cdot\dfrac{\partial h_{\beta\bar\mu}}{\partial z^{\gamma}}.$

证明： 由于$\square=\partial^*\partial+\partial^*\partial=\bar\partial^*\bar\partial+\bar\partial\bar\partial^*$，因此我们计算$(\bar\partial^*\bar\partial+\bar\partial\bar\partial^*)\omega$即可。据式

$$(\bar\partial\omega)_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_{s+1}}=(-1)^r\sum_{\lambda=0}^{s}(-1)^{\lambda}\nabla_{\bar\beta_\lambda}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\hat{\bar\beta}_\lambda\cdots\bar\beta_{s+1}},$$

以及(8.33)式，我们得

$$(\bar\partial^*\bar\partial\omega)_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s}$$

$$=(-1)^{r+1}h^{\alpha\bar\beta}\nabla_\alpha(\bar\partial\omega)_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s}$$

$$=(-1)^{r+1}(-1)^r\sum_{\alpha,\beta}[h^{\alpha\bar\beta}\nabla_\alpha\nabla_{\bar\beta}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s}$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{s}(-1)^{\lambda}h^{\alpha\bar\beta}\nabla_\alpha\nabla_{\bar\beta_\lambda}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta\cdots\hat{\bar\beta}_\lambda\cdots\bar\beta_s}]$$

$$=-\sum_{\alpha,\beta}h^{\alpha\bar\beta}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s;\bar\beta\alpha}+\sum_{\lambda=1}^{s}(-1)^{\lambda+1}h^{\alpha\bar\beta}$$

$$\cdot\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\hat{\bar\beta}_\lambda\cdots\bar\beta_s;\bar\beta_\lambda\alpha}\tag{8.36}$$

另一方面，

$$(\bar\partial\bar\partial^*\omega)_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s}$$

$$=(-1)^r\sum_{\lambda=1}^{s}(-1)^{\lambda+1}\nabla_{\bar\beta_\lambda}(\bar\partial^*\omega)_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\hat{\bar\beta}_\lambda\cdots\bar\beta_s})$$

$$=-\sum_{\lambda=1}^{s}(-1)^{\lambda+1}\nabla_{\bar\beta_\lambda}[h^{\alpha\bar\beta}\nabla_\alpha\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta\bar\beta_1\cdots\hat{\bar\beta}_\lambda\cdots\bar\beta_s}].$$

由命题 2 得

$$(\bar{\partial}\bar{\partial}^*\omega)_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s} = -\sum_{\lambda=1}^{s}(-1)^{\lambda+1}h^{\alpha\bar{\beta}}\nabla_{\bar{\beta}_\lambda}\nabla_\alpha$$

$$\cdot\ \omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}\bar{\beta}_1\cdots\hat{\bar{\beta}}_\lambda\cdots\bar{\beta}_s}. \tag{8.37}$$

所以有

$$(\Box\omega)_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s}$$

$$= -h^{\alpha\bar{\beta}}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s,\bar{\beta}\alpha} - \sum(-1)^{\lambda}h^{\alpha\bar{\beta}}R\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial\bar{z}^{\beta_\lambda}}\right)$$

$$\cdot\ \omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}\bar{\beta}_1\cdots\hat{\bar{\beta}}_\lambda\cdots\bar{\beta}_s}, \tag{8.38}$$

其中 $R\left(\dfrac{\partial}{\partial z^\alpha}, \dfrac{\partial}{\partial\bar{z}^{\beta_\lambda}}\right) = \nabla_\alpha\nabla_{\bar{\beta}_\lambda} - \nabla_{\bar{\beta}_\lambda}\nabla_\alpha, \nabla_{\left[\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial\bar{z}^{\beta_\lambda}}\right]} = 0.$

由 Ricci 恒等式(8.26)，我们有

$$-\sum_\lambda(-1)^\lambda h^{\alpha\bar{\beta}}R\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial\bar{z}^{\beta_\lambda}}\right)\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}\bar{\beta}_1\cdots\hat{\bar{\beta}}_\lambda\cdots\bar{\beta}_s}$$

$$= -\sum_\lambda(-1)^\lambda h^{\alpha\bar{\beta}}[\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}\bar{\beta}_1\cdots\hat{\bar{\beta}}_\lambda\cdots\bar{\beta}_s,\bar{\beta}_\lambda\alpha}$$

$$-\ \omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}\bar{\beta}_1\cdots\hat{\bar{\beta}}_\lambda\cdots\bar{\beta}_s,\alpha\bar{\beta}_\lambda}]$$

$$= +\sum_\lambda^s(-1)^\lambda h^{\alpha\bar{\beta}}\cdot\Big\{\sum_i R^l{}_{\alpha_i\alpha\bar{\beta}_\lambda}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_{i-1},l,\alpha_{i+1}\cdots\alpha_r\bar{\beta}\bar{\beta}_1\cdots\hat{\bar{\beta}}_\lambda\cdots\bar{\beta}_s}$$

$$-\ R^{\bar{\tau}}{}_{\bar{\beta}\alpha\bar{\beta}_\lambda}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\tau}\bar{\beta}_1\cdots\hat{\bar{\beta}}_\lambda\cdots\bar{\beta}_s}$$

$$-\sum R^{\bar{\tau}}{}_{\bar{\beta}_k\alpha\bar{\beta}_\lambda}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}\bar{\beta}_1\cdots\underset{\uparrow\atop\tau}{\hat{\bar{\beta}}_k}\cdots\hat{\bar{\beta}}_\lambda\cdots\bar{\beta}_s}\Big\}. \tag{8.39}$$

注意到

$$h^{\alpha\bar{\beta}}R^{\bar{\tau}}{}_{\bar{\beta}_k\alpha\bar{\beta}_\lambda}\cdot\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}\bar{\beta}_1\cdots\hat{\bar{\beta}}_k\cdots\hat{\bar{\beta}}_\lambda\cdots\bar{\beta}_s} = 0, \tag{8.40}$$

这是因为

$$h^{\alpha\beta}R^{\bar{\tau}}_{\bar{\beta}k\alpha\bar{\beta}_\lambda}=h^{\alpha\bar{\beta}}\cdot h^{\gamma\bar{\tau}}R_{\gamma\bar{\beta}\quad\alpha\bar{\beta}_\lambda}$$

关于指标 $\bar{\beta}$ 和 τ 是对称的，而

$$\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}\bar{\beta}_1\cdots\underset{\uparrow\atop\bar{\tau}}{\hat{\bar{\beta}}_k}\cdots\hat{\bar{\beta}}_\lambda\cdots\bar{\beta}_s}$$

关于 $\bar{\beta}$ 和 τ 是反称的，故有(3.40)．其中记号 $\underset{\uparrow\atop\bar{\tau}}{\hat{\beta}_k}$ 表示在原来 $\bar{\beta}_k$ 所处的位置用 τ 替换掉 $\bar{\beta}_k$．因此得

$$-\sum_{\lambda=1}^{r}(-1)^{\lambda}h^{\alpha\bar{\beta}}R\left(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}},\ \frac{\partial}{\partial\bar{z}^{\beta_\lambda}}\right)\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}\bar{\beta}_1\cdots\hat{\bar{\beta}}_\lambda\cdots\bar{\beta}_s}$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{r}(-1)^{\lambda}h^{\alpha\bar{\beta}}\{R^{l}_{\alpha_i\alpha\bar{\beta}_\lambda}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_{i-1}l\alpha_{i+1}\cdots\alpha_r\bar{\beta}\bar{\beta}_1\hat{\bar{\beta}}_\lambda\cdots\bar{\beta}_s}$$

$$+R^{\bar{\tau}}_{\bar{\beta}\alpha\bar{\beta}_\lambda}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\tau}\bar{\beta}_1\cdots\hat{\bar{\beta}}_\lambda\cdots\bar{\beta}_s}\}$$

$$=h^{\alpha\bar{\beta}}R^{l}_{\alpha_i\alpha\bar{\beta}_\lambda}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_{i-1}l\alpha_{i+1},\cdots\alpha_r\alpha_1\beta_1\cdots\bar{\beta}_{\lambda-1}\bar{\beta}\bar{\beta}_{\lambda+1}\cdots\bar{\beta}_s}$$

$$-h^{\alpha\bar{\beta}}R^{\bar{\tau}}_{\bar{\beta}\alpha\bar{\beta}_\lambda}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_{\lambda-1}\bar{\tau}\bar{\beta}_{\lambda+1}\cdots\bar{\beta}_s}\tag{8.41}$$

将(8.41)代入(8.38)即得命题5．

在本节中，我们采用的方法是：将 Kähler 流形 $(M,\ h)$ 视为 $2\dim_{\mathbb{C}}M$ 维的 Riemann 流形 $(M, 2\mathrm{Re}h)$，把 M 上的 (r, s) 微分形式 ω 看作 $(r+s)$ 阶实微分形式 $\omega_p(p=r+s)$．利用 Riemann 情形的结果写出 $*\omega_p$，然后再用复的语言把 $*\omega_p$ 翻译出来，因而得出 $*\omega_{(r,s)}$，$\bar{\partial}^*\omega$ 及 $\partial^*\omega$ 的复坐标系下的表达式．最终在复坐标系 $\{z^1,\ \cdots,\ z^n\}$ 下写出 Neumann 算子的表达式来．需要指出的是这种方法并不要求流形 M 紧致或被作用元素 ω 有紧支集．特别地，若 M 紧致，则命题4中的公式可利用分部积分的办法很容易得到．

§2.9 Kähler 子流形

设M为m维 Kähler 流形，N为M的n维全纯子流形，即$N\hookrightarrow M$为全纯浸入 (holomorphic immersion)，$n<m$. M的复结构J_M限制在N上为N的复结构J_N. M上的 Hermite 度量h_M和 Kähler 形式ω_M限制在N上为N的 Hermite 度量h_N和 Kahler 形式ω_N. 据§2.4定理3，我们知道N为 Kähler流形. 分别用∇^M和∇^N记$(M,\ 2\mathrm{Re}h_M)$和$(N,\ 2\mathrm{Re}h_N)$的 Riemann 联络(等于其复度量联络).

N在M中的第二基本形式$S(X,\ Y)$有下述性质.

命题 1

$$S(X,JY)=S(JX,Y)=JS(X,Y)=JS(Y,X) \tag{9.1}$$

证明：对于N上的切向量X,Y，自然地可将它视为M上的切向量. 记

$$\nabla_X^M Y=\tilde{\nabla}_X^N Y+S(X,Y),$$

其中$\tilde{\nabla}_X^N Y$为N上的切向量，称为切向部分. 而$S(X,Y)$正交于TN，称之为($\nabla_X^M Y$的)法向部分. 据子流形的一般理论知$\tilde{\nabla}^N$为N上的 Riemann 联络. 因此$\tilde{\nabla}^N$即为N上的复度量联络∇^N.

由于M和N都是 Kähler 流形，所以有

$$\begin{aligned}S(X,JY)&=\nabla_X^M JY-\nabla_X^N JY=J\nabla_X^M Y-J\nabla_X^N Y\\&=JS(X,Y).\end{aligned}$$

据$S(X,Y)$的对称性

$$S(JX,Y)=S(Y,JX)=JS(Y,X)=JS(X,Y).$$

设N上切向量X，Y单位正交。由X和Y张成的二维平面记为π. 根据著名的 Gauss 方程，我们有$K^M(\pi)$与$K^N(\pi)$的关系式

$$K^N(\pi) = K^M(\pi) + g^M(S(X,Y), S(Y,Y)) - g^M(S(X,Y), S(X,Y)), \qquad (9.2)$$

其中 $g^M = 2\mathrm{Re}h_M$。

若取$Y = JX$代入(9.2)式，得

$$\begin{aligned} K^N(\pi) &= K^M(\pi) + g^M(S(X,X), S(JX,JX)) \\ &\quad - g^M(S(X,JX), S(X,JX)) \\ &= K^M(\pi) - 2g^M(S(X,X), S(X,X)). \end{aligned} \qquad (9.3)$$

因此有下列命题：

命题 2 设N为 Kähler 流形M的子流形，则N的全纯截曲率不超过M(相对应)的全纯截曲率。

对于单位切向量$X \in T_p(N)$，我们选取$X_1, \cdots, X_n\ X_{n+1}, \cdots, X_m \in T_p(M)$，使得$X_1, \cdots, X_n \in T_p(N)$，并且$X_1, \cdots, X_m$，$JX_1, \cdots, JX_m$构成$T_p(M)$的单位正交基。所以有

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}^N(X) &= \mathrm{Ric}^N(X,X) \\ &= \sum_{i=1}^{n}[R^N(X_i, X, X_i, X) + R^N(JX_i, X, JX_i, X)] \end{aligned} \qquad (9.4)$$

及

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}^M(X) &= \mathrm{Ric}^M(X,X) \\ &= \sum_{i=1}^{m}[R^M(X_i, X, X_i, X) + R^M(JX_i, X, JX_i, X)] \end{aligned} \qquad (9.5)$$

利用(9.1)式与(9.3)式，直接计算得

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ric}^N(X,X)\\&=\sum_{i=1}^{n}[R^M(X_i,X,X_i,X)+R^M(JX_i,X,JX_i,X)]\\&-2\sum_{i=1}^{n}g^M(S(X_i,X),S(X_i,X)).\end{aligned}\tag{9.6}$$

再由(9.5)式及(9.6)式，马上得到N和M的Ricci张量间的关系式

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}^N(X,X)&=\mathrm{Ric}^M(X,X)\\&-\sum_{i=n+1}^{m}[R^M(X_i,X,X_i,X)+R^M(JX_i,X,JX_i,X)]\\&-2\sum_{i=1}^{n}g^M(S(X_i,X),S(X_i,X)),\end{aligned}\tag{9.7}$$

因此有

命题 3　设M为m维Kähler流形，其曲率为零，则M的任何全纯子流形N都有负定的Ricci张量，即对N的任何切向量X有

$$\mathrm{Ric}^N(X,X)\leqslant 0.$$

下面我们计算第二基本形式S的迹．还取单位正交基$X_1,\cdots,X_n,\cdots,X_m,JX_1,\cdots,JX_m$，于是有

$$\begin{aligned}\mathrm{Trace}S=&S(X_1,X_1)+S(JX_1,JX_1)+\cdots+S(X_n,X_n)\\&+S(JX_n,JX_n)+\cdots+S(X_m,X_m)\\&+S(JX_m,JX_m).\end{aligned}$$

由于 $S(JX_i,JX_i)=J^2S(X_i,X_i)=-S(X_i,X_i)$，$1\leqslant i\leqslant m$. 因此 $\mathrm{Trace}S\equiv 0$. 于是有下面命题.

命题 4 Kähler 流形M的任何全纯子流形均为极小子流形.

从以上简单讨论知道，Kähler 子流形的性质与 Riemann 子流形性质相比更为特殊. M为 Kähler 时，N与M的曲率关系更为密切. 而在 Riemann 子流形的情形下，若余维数$(\dim M-\dim N)$比较大时，M和N的曲率关系是很弱的.

最后，我们作为前面命题的运用，给出所谓 Stein 流形的一个必要条件.

定义 对于n维复流形M，我们用$H(M)$记M上的所有全纯函数. M称为 Stein 流形，若下面条件满足

(1) M是全纯凸的，即对任何紧子集$K\subset M$,

$$\hat{K}=\{p\in M \mid |f(p)|\leqslant\sup_K|f|,\ \forall f\in H(M)\}$$

也是M的紧子集.

(2) $H(M)$分离M上的点，即对于任何$p,q\in M$，存在$f\in H(M)$，使得$f(p)\neq f(q)$.

(3) M上的全纯函数给出M的的局部坐标，即对于任何$p\in M$，存在f^1，…，$f^n\in H(M)$，使得$(f^1$，…，$f^n)$为p点附近的复局部坐标.

显然 Stein 流形是 C^n 中全纯凸域的推广. 由于在 Stein 流形上存在丰富的非常值的全纯函数，所以 Stein 流形的概念在多复变中是一个很重要的研究对象. 下面这个命题给出了 Stein 流形的一个必要条件.

命题 5 任何 Stein 流形上均容许一个完备的 Kähler 度量，其全纯截曲率非正，Ricci 曲率张量负定.

证明 根据R. Remmert定理，n维Stein流形N可以嵌入到C^{2n+1}中作为其闭复子流形.（参见L. Hörmander著的An Introduction to complex Analysis in several variables，或R. Guning and H. Rossi，[68] P219—226).

由于C^{2n+1}的曲率为零，根据命题3和命题2，立即推出命题5。

第三章　Riemann 流形上热半群的一些性质

§3.1　引　　言

设M为 n 维完备的 Riemann 流形. 在局部坐标系 $\{x^i\}$ 下，度量张量为

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j.$$

这里及今后使用和号的省略.

我们用 ∇ 记 M 上的 Levi-Civita 联络，$*$ 为 Hodge 星（对偶）算子. 用 δ 记外微分算子 d 的共轭算子，$dv(x) = \sqrt{g}\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ 为M的体积元素，其中 $g = \det(g_{ij})$.

我们要研究的算子是 Laplace 算子 Δ. 在本章中采用这样的符号约定：使得 Δ 成为负定的. 这就与第一章中算子Δ相差一个负号，而这种差异是分析学家与几何学家不同爱好所致，并且各自有着不同的理由. 这种差异不是本质的，只要在我们讨论问题前说明采用何种符号即可.

作用在M上的函数上，Δ 取 Laplace-Beltrami 算子

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{g}\, g^{jk}\frac{\partial}{\partial x^k} f\right), \qquad f \in C^\infty(M).$$

其中
$$g_{ij}\cdot g^{jk} = \delta_{ik}.$$

作用在微分形式上，Δ 取 Hodge-deRham 算子

$$\Delta = -(d\delta + \delta d).$$

作用在张量上，Δ 取为 Laplace-Bochner算子

$$\Delta = \nabla^j \nabla_j,$$

其中 $$\nabla_j = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}, \nabla^j = g^{jk}\nabla_k.$$

定理[31] 对于完备的 Riemann 流形M，其上的 Laplace 算子 Δ (作用在函数、形式或张量上) 均为本质 (essentially) 自伴算子.

从M的 Laplace 算子出发，我们定义相应的热算子 $L = \Delta - \frac{\partial}{\partial t}$(作用在带参数 t 的函数、形式或张量上).

设 Δ 为 Laplace-Beltrami 算子，则热方程

$$Lu(x, t) = \left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)u(x, t) = 0$$

的基本解称为M的热核.

确切地，我们有下面定义：

定义 1 M的热核是一个函数 $H(x, y, t)$，$x, y \in M$，$t \in R^+$，且满足下面条件：

(H_1) H 关于所有变元连续，关于前两个变元(称为空间变元)为 C^2 的，关于第三个变元(称为时间变元)为 C^1 的.

(H_2) $$L_y H(x, y, t) = 0.$$

(H_3) 对于任何 $x \in M$，有

$$\lim_{t \to 0+} H(x, \cdot, t) = \delta_x,$$

其中 δ_x 为在点 x 的 Dirac 分布，即对于任何M上的具有紧支集的连续函数 f，有

$$\lim_{t \to 0+} \int_M H(x, y, t) f(x)\, dv(x) = f(y).$$

类似地我们可以定义M的 p- 形式热核($0\leqslant p\leqslant n$). 我们有下面定义.

定义 2 M上的一个光滑依赖于时间参数 $t\in\mathrm{R}^+$ 的双 p 形式 $H(x,y,t)$ 称为M的 p- 形式热核,若

(H_1') $H(x,y,t)$ 关于所有三个变元连续,关于前两个空间变元为 C^2 的,关于最后一个变元(时间变元)为 C^1 的.

(H_2') $L_yH(x,y,t)=0$, 其中

$$L_y=\Delta_y-\frac{\partial}{\partial t},\ \Delta_y=-(d_y\delta_y+\delta_yd_y).$$

(H_3') 对于M上任何具有紧支集的连续 p-形式 $f(y)$, 有

$$\lim_{t\to 0+}\int_M H(x,y,t)\wedge *f(y)=f(x).$$

注意上面定义 1 和定义 2 均不需要假定M为紧流形. 若M紧则不需要 f 有紧支集,这自然是满足的.

对于 Hermite 流形, 完全类似地可以定义 (r,s) 形式热核. 从上面定义可以推出, 若热核 (p- 形式热核) 存在的话必唯一. 对于许多流形而言, 比如紧致无边 Riemann 流形, 热核 (p- 形式热核)都存在. 这方面的详细讨论参见[16]及[15].

在本章中, 我们将对紧致可定向完备的 Riemann 流形 M, 讨论由 Hodge-deRham 算子生成的热半群的一些性质.

§3.2 热半群$\{e^{t\Delta}\}_{t\geqslant 0}$的渐近性态

对于由 Laplace-Beltrami 算子Δ生成的热半群$\{e^{t\Delta}\}_{t\geqslant 0}$,

下面定理是熟知的。

定理1[15] 设 M 为紧致 Riemann 流形. 对于任何函数 $f\in L^2(M)$，当 $t\to+\infty$时，$e^{t\Delta}f$ 在 M 上一致收敛于一个固定常数.

由 Hodge-deRham 算子生成的热半群记为$\{e^{t\Delta}\}_{t\geq 0}$，其其中 $\Delta=-(d\delta+\delta d)$. 在本节前半部分，我们主要推广了上述定理，得到

定理 1 设 M 为紧致可定向的 Riemann 流形，对于 M 上任何 L^2 可积分的 p 形式 $f(0\leqslant p\leqslant n)$. 当 $t\uparrow+\infty$时. $e^{t\Delta}f$ 在 M 上一致收敛于 M 上的一个 p 次调和形式.

为了证明定理 1，我们要先给一些简单引理.

引理 1 设 M 上的 p 次微分形式 $u(x,t)$ 光滑地依赖于单参数 $t\in R^+$，并且满足热方程

$$L_x u(x,t)=0,$$

则有

$$(1)\quad (u(x,t),v_j)=\int_M\langle u(x,t),v_j\rangle dv(x)$$

$$=\int_M u(x,t)\wedge *_x v_j$$

是与 t 无关的常数，其中 $v_1,\cdots,v_{B_p}$，$B_p=\dim H^p(M)$，为 M 上的所有 p次调和形式所成空间 $H^p(M)$的基.

(2) $(u(x,t),u(x,t))=\|u(x,t)\|_2^2$ 为 t 的减函数.

证明：关于 t 求导得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_M u(x,t)\wedge *v_j=\frac{\partial}{\partial t}\int_M\langle u(x,t),v_j\rangle dv(x)$$

$$=\int_M\left\langle\frac{\partial}{\partial t}u,v_j\right\rangle dv(x)=\int_M\langle\Delta u,v_j\rangle dv(x)$$

$$= \int_M \langle u, \Delta v_j \rangle dv(x) = 0. \qquad j = 1, \cdots, B_p.$$

这样就得到引理 1 的(1). 同理又有

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_M u(x, t) \wedge * u(x, t)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_M \langle u(x, t), u(x, t) \rangle dv(x)$$

$$= 2\int_M \langle \Delta u, u \rangle dv(x)$$

$$= -2(\| \delta u \|_2^2 + \| du \|_2^2) \leqslant 0.$$

引理得证.

引理 2 设 $u(x, s)$, $v(x, s)$ 为 M 上两个依赖于参数 $s \in \mathrm{R}^+$ 的连续的 p-形式, 并且设它们关于第一个变元 x 为 C^2, 关于第二个变元为 C^1, 则对于任意子区间 $[\alpha, \beta] \subseteq (0, t)$, 有下面等式成立:

$$\begin{aligned} &\int_M [u(z, t-\beta) \wedge * v(z, \beta) \\ &\quad - u(z, t-\alpha) \wedge * v(z, \alpha)] \\ &= \int_\alpha^\beta d\tau \int_M \{(Lu)(z, t-\tau) \wedge * v(z, \tau) \\ &\quad - u(z, t-\tau) \wedge * (Lv)(z, \tau)\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

证明: 由于 $L = \Delta - \dfrac{\partial}{\partial t}$, 所以有

$$(Lu)(z, t-\tau) \wedge * v(z, \tau)$$
$$- u(z, t-\tau) \wedge * (Lv)(z, \tau)$$

$$=\left[\Delta u(z,\ t-\tau)-\frac{\partial u}{\partial t}(z,\ t-\tau)\right]\wedge *v(z,\ \tau)$$

$$-u(z,\ t-\tau)\wedge *\left[\Delta v(z,\ \tau)-\frac{\partial v}{\partial t}(z,\ \tau)\right]$$

$$=\Delta u(z,\ t-\tau)\wedge *v(z,\ \tau)-u(z,\ t-\tau)\wedge *\Delta v(z,\ \tau)$$

$$+u(z,t-\tau)\wedge *\frac{\partial}{\partial \tau}v(z,\ \tau)+\frac{\partial u}{\partial \tau}(z,\ t-\tau)\wedge *v(z,\ \tau)$$

$$=\Delta u(z,\ t-\tau)\wedge *v(z,\ \tau)-u(z,\ t-\tau)\wedge *\Delta v(z,\ \tau)$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\langle u(z,\ t-\tau),\ v(z,\ \tau)\rangle. \tag{2.2}$$

将(2.2)式两边在 M 上积分得

$$\int_M [(Lu)(z,\ t-\tau)\wedge *v(z,\ \tau)$$

$$-u(z,t-\tau)\wedge *(Lv)(z,\ \tau)]$$

$$=\int_M [\Delta u(z,\ t-\tau)\wedge *v(z,\ \tau)$$

$$-u(z,\ t-\tau)*\Delta v(z,\ \tau)]$$

$$+\int_M \frac{\partial}{\partial \tau}\langle u(z,\ t-\tau),\ v(z,\ \tau)\rangle dv$$

$$=\int_M \frac{\partial}{\partial \tau}\langle u(z,\ t-\tau),v(z,\ \tau)\rangle dv \tag{2.3}$$

再将(2.3)式两边在子区间$[\alpha,\ \beta]$上关于 τ 积分得

$$\int_\alpha^\beta d\tau \int_M [Lu)(z,\ t-\tau)\wedge *v(z,\ \tau),u(z,\ t-\tau)\wedge$$

$$*(Lv)(z, \tau)]$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} d\tau \int_{M} \frac{\partial}{\partial\tau} \langle u(z, t-\tau), v(z, \tau)\rangle dv(z)$$

$$= \int_{M} [u(z,t-\beta)\wedge *v(z, \beta) - u(z, t-\alpha)\wedge *v(z,\alpha)]$$

引理 2 证毕.

从引理 2 我们可以推出微分形式热核的一些基本性质，即有下面命题：

命题 1 M 上的 p–形式热核若存在的话必然唯一，并且关于两个空间变元对称($0\leqslant p\leqslant n$).

证明： 设 M 上有两个 p–形式热核 H_1 和 H_2，其中 $0\leqslant p\leqslant n$. 对于

$$u(z, \tau) = H_1(z, x, \tau),$$
$$v(z, \tau) = H_2(z, y, \tau),$$

利用公式(2.1)得

$$\int_{M} H_1(z, x, t-\beta)\wedge *H_2(z, y, \beta)$$
$$= \int_{M} (H_1(z, x, t-\alpha)\wedge *H_2(z, y, \alpha). \tag{2.4}$$

上式用到了 $LH_1 = LH_2 = 0$. 在(2.4)中命 $\alpha\downarrow 0$, $\beta\uparrow t$, 即得

$$H_2(x, y, t) = H_1(y, x, t). \tag{2.5}$$

同法又可得

$$H_1(x, y, t) = H_2(y, x, t) \tag{2.6}$$

在(2.4)式中命 $\alpha\uparrow t$, $\beta\downarrow 0$, 我们有

$$H_1(y, x, t) = H_2(x, y, t). \tag{2.7}$$

由(2.5)、(2.6)及(2.7)式即得命题 1.

由Hodge–deRham 算子 $\Delta=-(d\delta+\delta d)$ 生成的热扩散半群$\{e^{t\Delta}\}_{t>0}$，对于 M 上具有紧支集的光滑 p–形式 $f(x)$，有

$$(e^{t\Delta}f)(x)=\int_M H(x,\ y,\ t)\wedge *f(y). \tag{2.8}$$

需要说明的是，由于 M 完备(记 M 上的所有 L^2 的p–形式组成的空间为 L^2_p)，所以 Hodge–deRham 算子 Δ 在 L^2_p上是稠密定义的自伴算子．因此对 $f\in L^2_p(M)$，$(e^{t\Delta}f)$有意义．

有了上面准备，我们下面开始证明定理 1．

定理 1 的证明：

由于 $e^{t\Delta}f$ 为热方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u$$

的解，由引理1知道，$\|e^{t\Delta}f\|_2^2$ 为 t 的减函数．所以当 $t\to+\infty$ 时，$\|e^{t\Delta}f\|_2^2$ 有非负极限．实际上由于调和形式的能量积分最小，而 $=\|e^{t\Delta}f\|_2^2$随着 t 增大而衰减．因此我们可以期待 $e^{t\Delta}f$趋于一个调和形式($r\to+\infty$)．

由于

$$\begin{aligned}&\|e^{t\Delta}f-e^{s\Delta}f\|_2^2\\&=\|e^{t\Delta}f\|_2^2-2\|e^{\frac{t+s}{2}\Delta}f\|_2^2+\|e^{s\Delta}f\|_2^2,\end{aligned} \tag{2.9}$$

即可推出 $e^{t\Delta}f$ 在 L^2 中收敛．

对于固定的 $T>0$，对于任何 $x\in M$，t，$s\in\mathrm{R}^+$，有

$$\begin{aligned}&|(e^{(t+T)\Delta}f-e^{(s+T)\Delta}f)(x)|\\&=|e^{T\Delta}(e^{t\Delta}f-e^{s\Delta}f)(x)|\\&\leqslant\left|\int_M H(x,\ y,\ T)\wedge*(e^{t\Delta}f-e^{s\Delta}f)(y)\right|\\&\leqslant C\cdot\|e^{t\Delta}f-e^{s\Delta}f\|_2^2,\end{aligned}$$

其中 C 为常数. 因此我们推出 $e^{t\Delta}f$ 在 M 上一致收敛 ($t\to+\infty$). 设其极限为 Hf, Hf 为 p-形式. 根据

$$
\begin{aligned}
&|e^{(t+l)\Delta}f-e^{l\Delta}(Hf)| \\
&\leqslant \|e^{t\Delta}f-Hf\|_2^2\cdot\sup_t\|H(x,\ \cdot,\ t)\|_2^2,
\end{aligned}
$$

对所有 $t>T$, 由引理 1 得

$$
\begin{aligned}
&|e^{(t+l)\Delta}f-e^{l\Delta}(Hf)| \\
&\leqslant \|e^{t\Delta}f-Hf\|_2^2\cdot\sup_T\|H(x,\ \cdot,\ T)\|_2^2.
\end{aligned}
$$

于是有

$$0=\lim_{t\to+\infty}(e^{(t+l)\Delta}f-e^{l\Delta}Hf)=Hf-e^{l\Delta}Hf,$$

即 $\quad Hf=e^{l\Delta}(Hf),\qquad l>T \qquad (2.11)$

又由

$$\Delta(Hf)=\Delta(e^{l\Delta}Hf)=\frac{\partial}{\partial t}((e^{l\Delta}(Hf))=\frac{\partial}{\partial t}Hf=0,$$

据 Δ 的椭圆性及上式,我们得到的 Hf 为一个 q 次调和形式, 定理 1 得证.

利用定理 1, 我们可以给出 Hodge 分解定理 (见 § 1.7 的 Hodge 定理) 的一个简单证明.

Hodge 分解定理: 设 M 为紧致可定向的 Riemann 流形, 则 $\Lambda_p(M)$ ($1\leqslant p\leqslant n$) 有下面正交直和分解:

$$\Lambda_p(M)=d\Lambda^{p-1}(M)\otimes H^p(M)\otimes\delta\Lambda^{p+1}(M).$$

实际上, 对于任何 $\omega\in\Lambda^p(M)$, 由于 $H\omega$ 为调和形式, 可以证明 $e^{t\Delta}\omega$ 依指数速度衰变为 $H\omega$, 因此可令

$$G\omega=\int_0^{+\infty}[e^{t\Delta}\omega-H\omega]dt. \qquad (2.12)$$

由于 $e^{t\Delta}\omega$ 在 M 上一致收敛于 $H\omega$, 我们有

$$\Delta G\omega = \int_0^{+\infty} \Delta[e^{t\Delta}\omega - H\omega]dt = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} e^{t\Delta}(e^{t\Delta}H\omega)\, dt$$

$$= \lim_{t\to+\infty} e^{t\Delta}\omega - \lim_{t\to 0+} e^{t\Delta}\omega = H\omega - \omega,$$

从而有

$$\omega = H\omega - \Delta G\omega = H\omega + d\delta G\omega + \delta d G\omega.$$

正交性是显然的. 这样就证明了 Hodge 定理.

§ 3.3 热半群的L^p压缩性

在本节中，我们将讨论热半群的 $L^p(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$压缩性. 通过对流形 M 的曲率加以限制，证明了 Hodge-deRham 算子生成的热半群的 L^p 压缩性.

R. S. Strichartz 在[31]中证明了作用在函数上的Laplace-Beltrami 算子 Δ 所生成的热半群的 $L^p(1\leqslant p \leqslant +\infty)$的压缩性质，即对于任任 $1 \leqslant p \leqslant +\infty$，有

$$\|e^{t\Delta}f\|_p \leqslant \|f\|_p, \qquad t>0,\ f\in L^p(M).$$

H. Hess 和 D. A. Uhlenbrock 等在 [32] 中指出：作用在函数上的 Laplace-Beltrami 算子生成的热半群的 L^p 压缩性可以推出作用在张量上的 Bochner-Laplace 算子所生成的热半群的 L^p 压缩性. 本节讨论 Hodge-deRhan 算子生成的热半群. 主要结果是：

定理 2　设 M 为完备的 Riemann 流形. $\Delta = -(d\delta + \delta d)$ 为 Hodge-deRham 算子(也称为 Hodge-Laplace 算子). 由它所生成的热半群$\{e^{t\Delta}\}_{t\geqslant 0}$有下面结论.

(1) $\{e^{t\Delta}\}_{t\geqslant 0}$ 总是 L^2 压缩的，即对于任何 L^2中元素 f，有

$$\|e^{t\Delta}f\|_2 = \leqslant \|f_2\|.$$

(2) 若 M 的Ricci 曲率处处非负，则热半群$\{e^{t\Delta}\}_{t\geqslant 0}$作用在1形式上为 L^p ($1\leqslant p\leqslant +\infty$) 压缩的，即对于任何 $\alpha\in L_1^p(M)$，有

$$\|e^{t\Delta}\alpha\|_p \leqslant \|\alpha\|_p$$

(3) 若在 Gallot 和 Meyer[45] 意义下，M 的曲率算子处处非负，则$\{e^{t\Delta}\}_{t\geqslant 0}$对任何 p($1\leqslant p\leqslant +\infty$)总是 L^p 压缩的，即

$$\|e^{t\Delta}f\|_p \leqslant \|f\|_p, \quad f\in L_r^p(M), \quad 0\leqslant r\leqslant n$$

为了证明定理2，我们首先给出若干引理.

引理3[33] 在 Banach 空间 X 中稠密定义的闭算子 L 生成的半群为压缩半群当且仅当

(1) L 为散逸型算子(dissipative operator)；

(2) 存在 $\lambda>0$,使得 $\lambda I-L$ 在L的定义域中把 X 映满.

对于 Banach 空间 $X=L^p{}_r(M)$ 及 $L=\Delta$，则引理3中条件(1)，(2)可表述为

引理3′ 由 Hodge-deRham 算子Δ 生成的热半群是 L^p 压缩的当且仅当

(1′)$(|u|^{p-2}u,\ \Delta u)\leqslant 0$， $u\in\mathscr{D}_r$;

(2′)不存在 $u\in L_r^q\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\right)$及 $\lambda>0$，使得

$$\Delta u=\lambda u,$$

其中 $\mathscr{D}_r$ 为 M 上具有紧支集的 C^∞ 光滑的 r 次微分形式所成的空间，易知它在 L_r^p 中稠密。

引理4[31] 用 $B_r(p)$ 记 M 中以 p 点为中心，r 为半径的测地球，并设 M 完备，则存在一族函数 $\varphi_{r,s}$，使得

$\varphi_{r,s}|_{B_r}=1((r<s)$，$0\leqslant\varphi_{r,s}|_{B_s}\leqslant 1$，以及在 B_s 之外 $\varphi_{r,s}$ 恒为 0，并且 $\varphi_{r,s}$ 为Lipschitz 函数，还满足估计式

$$\|\nabla\varphi_{r,s}\|_\infty\leqslant C(s-r)^{-1},$$

其中 C 为常数.

下面我们开始证明定理 2，分三个部分完成定理的证明.

定理 2 的第(1)部分的证明：

首先对于任何 $u\in\mathscr{D}_r\subset\Lambda^r(M)$，有

$$\begin{aligned}(|u|^{2-2}u,\Delta u)&=(u,\Delta u)=(u,-d\delta u-\delta du)\\&=-(\|\delta u\|_2^2+\|du\|_2^2)\leqslant 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

其次需要证明：不存在 $u\in L^2_r$ 及 $\lambda>0$，使得 $\Delta u=\lambda u$. 下面我们就利用反证法证明这个结论，如若不然，我们取函数 $\varphi=\varphi_{r,s}(0<r<s)$. 考虑

$$\begin{aligned}\lambda(\varphi^2u,u)&=(\varphi^2u,\lambda u)=(\varphi^2u,\Delta u)\\&=-(d(\varphi^2u),du)-(\delta(\varphi^2u),\delta u).\end{aligned}\tag{3.2}$$

我们先计算 $\delta(\varphi^2u)$. 为此取局部标架场 X_1，…，X_n 及其对偶的上标架场 ω^1，…，ω^n. 由公式

$$d=\sum\omega^i\wedge\Delta_i,\qquad \delta=-\sum I(X_j)\nabla_j,$$

我们有

$$\begin{aligned}\delta(\varphi^2u)&=-\sum_j I(X_j)\nabla_j(\varphi^2u)\\&=-\sum_j I(X_j)[2\varphi\cdot(\nabla_j\varphi)\cdot u+\varphi^2\nabla_j u]\\&=\varphi^2\delta u-\sum_j 2\varphi\nabla_j\varphi[I(X_j)u].\end{aligned}$$

因此得

$$(\delta(\varphi^2 u), \delta u) = (\varphi^2 \delta u, \delta u)$$

$$-\left(\sum_j I(X_j)(2\varphi\nabla_j\varphi\cdot u), \delta u\right)$$

$$= (\varphi^2\delta u, \delta u) - \left(\sum_j 2\varphi\cdot\nabla_j\varphi\cdot u, \omega^j\wedge\delta u\right)$$

$$= (\varphi^2\delta u, \delta u) - \left(u, \left(\sum_j 2\varphi\cdot\nabla_j\phi\omega^j\right)\wedge u\right)$$

$$= (\varphi^2\delta u, \delta u) - 2(u, \varphi d\varphi\wedge\delta u). \tag{3.3}$$

将(3.3)式代入(3.2)式有

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \lambda(\varphi^2 u, u)\\ &= -(d(\varphi^2 u), du) - (\delta(\varphi^2 u), \delta u)\\ &= -(\varphi^2 du, du) - (2\varphi d\varphi\wedge u, du)\\ &\quad - (\varphi^2\delta u, \delta u) + 2(u, \varphi d\varphi\wedge\delta u).\end{aligned} \tag{3.4}$$

由(3.4)式可得

$$\begin{aligned}&\|\varphi du\|_2^2 + \|\varphi\delta u\|_2^2\\ &\leqslant 2|(\varphi d\varphi\wedge u, du)| + 2|(u, \varphi d\varphi\wedge\delta u)|\\ &\leqslant 2\|d\varphi\|_\infty\cdot\|u\|_2\cdot\|\varphi du\|_2\\ &\quad + 2\|d\varphi\|_\infty\cdot\|u\|_2\cdot\|\varphi\cdot\delta u\|_2\\ &= 2\|d\varphi\|_\infty\cdot\|u\|_2(\|\varphi du\|_2 + \|\varphi\delta u\|_2).\end{aligned} \tag{3.5}$$

又由于

$$\begin{aligned}2\|\varphi du\|_2\cdot\|\varphi\delta u\|_2 &\leqslant \|\varphi du\|_2^2 + \|\varphi\cdot\delta u\|_2^2\\ &\leqslant 2\|d\varphi\|_\infty\cdot\|n\|_2\cdot(\|\varphi du\|_2 + \|\varphi\delta u\|_2),\end{aligned} \tag{3.6}$$

得出

$$\|\varphi du\|_2+\|\varphi\delta u\|_2$$
$$=\frac{\|\varphi du\|_2^2+\|\varphi\delta u\|_2^2+2\|\varphi du\|_2\cdot\|\varphi\delta u\|_2}{\|\varphi du\|_2+\|\varphi\delta u\|_2}$$
$$\leqslant 2\|d\varphi\|_\infty\cdot\|u\|_2\leqslant 2K\|d\varphi\|_\infty, \tag{3.7}$$

其中 K 为正常数.

在(3.7)式中，对于函数 $\varphi=\varphi_{r,s}$，固定 $r>0$，令 $s\to+\infty$，则得

$$\|du\|_2+\|\delta u\|_2=0,$$

即 $du=\delta u=0$，所以有 $u=\frac{1}{\lambda}\Delta u=0$. 这就证明了不存在 $u\in L^2_r$ 及 $\lambda>0$，使得 $\Delta u=\lambda u$. 与(3.1)一起就完成了定理2的第(1)部分的证明.

(2) 的证明：

首先证明：对任何 $p(1\leqslant p\leqslant+\infty)$，不存在 $\lambda>0$ 及一次微分形式 $\alpha\in L_1^q(M)$，使得 $\Delta\alpha=\lambda\alpha$，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 若不然，即存在 $\lambda>0$ 及 $\alpha\in L_1^q$ 使得 $\Delta\alpha=\lambda\alpha$.

根据 Weitzenbock 公式(见§1.7定理2)我们有

$$\lambda(\alpha,\alpha)=(\Delta\alpha,\alpha)$$
$$=-\sum_i(\nabla_{X_i}\alpha,\nabla_{X_i}\alpha)$$
$$+\left(\alpha,\sum_{i,j}\omega^i\wedge I(X_j)R(X_i,X_j)\alpha\right)$$
$$=-\sum_i\|\nabla_{X_i}\alpha\|_2^2+\left(\alpha,\sum_{i,j}\omega^i\wedge I(X_j)\right.$$

$$\cdot R(X_i, X_j)\alpha\Big). \tag{3.8}$$

设 $\alpha = \sum_i f_i \omega^i$，我们定义 α 的伴随向量 $\alpha^{\#} = \sum_i f_i X_i$.

令

$$R(X_i, X_j) X_k = R^l_{k\,i\,j} X_l,$$

则
$$R(X_i, X_j)\omega^k = -R^k_{l\,i\,j}\omega^l.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j} I(X_j) R(X_i, X_j)\alpha \\
&= \sum_{i,j} I(X_j)(R(X_i, X_j) f_k \omega^k) \\
&= -\sum_{i,j} I(X_j)(f_k R^k_{l\,i\,j}\omega^l) \\
&= -\sum_{i,j} f_k \cdot R^k_{j\,i\,j}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

将(3.7)式代入(3.8)式得

$$\lambda(\alpha, \alpha) = -\sum_i \|\nabla_{X_i}\alpha\|_2^2 - \int_M \mathrm{Ric}(\alpha^{\#}, \alpha^{\#}) dv \leqslant 0,$$

这样就与假定矛盾，因此对于任何 $p(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$，不存在 $\lambda > 0$ 及 $\alpha \in L^q_1(M)$，使得 $\Delta\alpha = \lambda\alpha$.

其次需要证明：对于 $u \in \mathscr{D}_1 \subset \Lambda^1(M)$，$u = \sum u_i \omega^i$，有

$$(|u|^{p-2}u, \Delta u) \leqslant 0.$$

事实上，

$$\langle |u|^{p-2}u, \Delta u\rangle = \left(|u|^{p-2}u, \sum_i \nabla^2_{X_i X_i} u\right)$$

$$+\left(|u|^{p-2}u, \sum_{i,j} \omega^i \wedge I(X_j) R(X_i, X_j) u\right). \qquad (3.10)$$

由于 Laplace-Bochner 算子生成的热半群为 L^p 压缩的[32]，所以有

$$\left(|u|^{p-2}u, \sum_i \nabla_{X_i X_i} u\right) \leqslant 0 .$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&(|u|^{p-2}u, \Delta u)\\
&\leqslant \left(|u|^{p-2}u, \sum_{i,j} \omega^i \wedge I(X_j) R(X_i, X_j) u\right)\\
&= -(R^k_{j\,i\,j} u_k \omega^i, |u|^{p-2} \cdot u_l \cdot \omega^l)\\
&= -\int_M R^k_{j\,i\,j} u_k u_i |u|^{p-2} dv \leqslant 0.
\end{aligned}$$

(2) 证明完毕。

在证明定理最后一部分前，我们首先给出曲率算子 ρ 的定义。这是 Gallot 和 Meyer 在 1975 年引进的.[34]

对于任何点 $x \in M$，定义算子 ρ_x 如下：

$$\begin{aligned}
\rho_x:\ & \Lambda^2(M) \longrightarrow \Lambda^2(M)\\
& X^* \wedge Y^* \longmapsto \rho_x(X^* \wedge Y^*),
\end{aligned}$$

使得

$$\langle \rho_x(X^* \wedge Y^*),\ U^* \wedge V^* \rangle = \langle R(X, Y)V, U\rangle,$$

其中 $X, Y, U, V \in T_x(M)$. 对于任何 $V \in T_x(M)$，V^* 表示在

对偶空间 $T_x^*(M)$ 中的对应元素. 即若 $X_1,\cdots,X_n$ 为 $T_x(M)$ 的基, $\omega^1,\cdots,\omega^n$ 为其对偶基, 如果 $V=\sum_i a^i X_i$, 则 $V^*=\sum_i a^i\omega^i$. 由于曲率张量的性质, 我们知道算子 ρ_x 为对称算子, 所以称它正定是有意义的.

今后我们称 $\rho_x\geqslant C$, C 为一常数, 是指对于任何 $\alpha\in\Lambda^2(M)$, 有 $\langle\rho_x(\alpha),\alpha\rangle\geqslant C\|\alpha\|_x^2$. 而 $\rho\geqslant C$ 意思是指对于任何点 $x\in M$, 均有 $\rho_x\geqslant C$.

为了今后陈述方便, 我们再定义一个映射 P_k ($0\leqslant k\leqslant n$).

$$P_k:\ (\Lambda^k M)\wedge(\Lambda^k M)\longrightarrow\Lambda^1(M)\wedge\Lambda^1(M)$$

$$\alpha\wedge\beta\longmapsto P(\alpha\wedge\beta),\quad \alpha,\beta\in\Lambda^k(M)$$

其中 $$P_k(\alpha\wedge\beta)=\sum_{i,j}\langle I(X_i)\alpha,I(X_j)\beta\rangle\omega^i\wedge\omega^j.$$

记 $$E(\alpha)=\sum_{i,j}\omega^i\wedge I(X_j)R(X_i,X_j)\alpha,\qquad \alpha\in\Lambda^k(M).$$

我们有下面引理:

引理 5 对于任何 $\alpha\in\Lambda^k(M)$, 有

$$R(X,Y)\alpha=\sum_i(R(X,Y)\omega^i)\wedge I(X_i)\alpha. \tag{3.11}$$

证明: 对于 $\alpha\in\Lambda^1(M)$, 上面等式的验证是平凡的. 对于一般的 k-形式, 只需对单项式 $\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_k}$ 及 $X=X_i$, $Y=Y_j$ 验证, 然后利用线性性质即可得到(3.11). 令

$$\alpha = \omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_k},$$

$$R(X_i,X_j)(\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_k})(X_{j_1},\cdots,X_{j_k})$$

$$= -\sum_{l=1}^{k}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_k}$$

$$\cdot(X_{j_1},\cdots,R(X_i,X_j)X_{j_l},\cdots,X_{j_k})$$

$$= -\sum\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_k}$$

$$\cdot(X_{j_1},\cdots,R^{\tau}_{j_l ij}X_{\tau},\cdots,X_{j_k})$$

$$= -\sum_{l,\tau}R^{\tau}_{j_l ij}\delta^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_{l-1},\tau,j_{l+1}\cdots j_k}. \tag{3.12}$$

另一方面，

$$\sum_{\tau}(R(X_i,X_j)\omega^{\tau})\wedge I(X_{\tau})(\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_k})$$

$$\cdot(X_{j_1},\cdots,X_{j_k})$$

$$= -\sum R^{\tau}_{kij}\omega^{k}\wedge I(X_{\tau})(\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_k})(X_{j_1},\cdots,X_{j_k})$$

$$= -\sum\varepsilon(\sigma)R^{\tau}_{kij}\omega^{k}(X_{\sigma(j_1)})I(X_{\tau})(\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_k})$$

$$\cdot(X_{\sigma(j_2)},\cdots,X_{\sigma(j_k)})$$

$$= -\sum_{\sigma,\tau}\varepsilon(\sigma)R^{\tau}_{\sigma(j_1)ij}\delta^{i_1\cdots i_k}_{\tau\sigma(j_2)\cdots\sigma(j_k)}$$

$$= -\sum_{\tau,l}R^{\tau}_{j_l ij}\delta^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_{l-1},\tau,j_{l+1}\cdots j_k}$$

$$= (R(X_i, X_j)\alpha)(X_{j_1}, X_{j_2}).$$

其中 σ 为$\{1, 2, \cdots, k\}$的置换，$\varepsilon(\sigma)$为它的符号.

引理 6 对于任何$\alpha, \beta \in \Lambda^k(M)$，则有

$$\langle -E\alpha, \beta\rangle = \sum_I \langle \rho(P_k(\alpha \wedge \omega^I), P_k(\beta \wedge \omega^I)\rangle,$$

其中求和是关于多重指标 $I = (i_1, \cdots, i_k)$，$1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_k \leqslant n$ 求和.

证明： 根据算子 P_k 的定义有

$$\sum_I \langle \rho[P_k(\alpha \wedge \omega^I)], P_k(\beta \wedge \omega^I)\rangle$$

$$= \sum_{I,i,j,l,k} \langle \rho[\langle I(X_i)\alpha, I(X_j)\omega^I\rangle \omega_i \wedge \omega_j],$$

$$\langle I(X_l)\beta, I(X_k)\omega^I\rangle \omega^l \wedge \omega^k\rangle$$

$$= \sum_{I,i,j,l,k} \langle I(X_i)\alpha, I(X_j)\omega^I\rangle \cdot \langle I(X_l)\beta, I(X_k)\omega^I\rangle$$

$$\cdot \langle \rho(\omega^i \wedge \omega^j), \omega^l \wedge \omega^k\rangle$$

$$= \sum_{I,i,j,l,k} \langle I(X_i)\alpha, I(X_j)\omega^I\rangle \cdot \langle I(X_l)\beta, I(X_k)\omega^I\rangle$$

$$\cdot \langle R(X_i, X_j)X_k, X_l\rangle$$

$$= \sum_{I,i,j,l,k} \langle \omega^j \wedge I(X_i)\alpha, \omega^I\rangle \cdot \langle \omega^k \wedge I(X_l)\beta, \omega^I\rangle$$

$$\cdot \langle R(X_i, X_j)(X_k), X_l\rangle$$

$$= \sum_{i,j,k,l} \langle \omega^j \wedge I(X_i)\alpha, \omega^k \wedge I(X_l)\beta\rangle \cdot R^l_{kij},$$

$$= \sum_{i,j,k,l} \langle \omega^i \wedge I(X_i)\alpha, R^l_{kij}\omega^k \wedge I(X_l)\beta \rangle$$

$$= \sum_{i,j,l} \langle \omega^j \wedge I(X_i)\alpha, (-R(X_i,X_j)\omega^l) \wedge I(X_l)\beta \rangle$$

$$= -\sum_{i,j} \langle \omega^i \wedge I(X_i)\alpha, R(X_i,X_j)\beta \rangle$$

$$= -\sum_{i,j} \langle \alpha, \omega^i \wedge I(X_j)R(X_i,X_j)\beta \rangle$$

$$= \langle \alpha, -E\beta \rangle$$

$$= \langle -E\alpha, \beta \rangle .$$

定理 2 (3)的证明：

首先考虑，

$$(|\alpha|^{p-2}\alpha, \Delta\alpha)$$

$$= \left(|\alpha|^{p-2}\alpha, \sum_i \nabla^2_{X_iX_i}\alpha \right)$$

$$+ \left(|\alpha|^{p-2}\alpha, \sum_{i,j} \omega^i \wedge I(X_j)R(X_i,X_j)\alpha \right),$$

$$\alpha \in \mathscr{D}_k \subset \Lambda^k(M).$$

由于 Laplace-Bochner 算子 $\sum\nabla^2_{X_iX_i}$ 为散逸型算子[82]，所以有

$$\left(|\alpha|^{p-2}\alpha, \sum_i \nabla^2_{X_iX_i}\alpha \right) \leqslant 0 .$$

又因为 M 的曲率算子 ρ 处处非负，据引理 6 我们有

$$\left(|\alpha|^{p-2}\alpha,\ \sum_{i,j}\omega^i \wedge I(X_j)R(X_i,X_j)\alpha\right)\leqslant 0.$$

故有

$$(|\alpha|^{p-2}\alpha, \Delta\alpha)\leqslant 0. \tag{3.13}$$

与第(2)部分的证明完全相同，由于 ρ 非负及引理 6，我们利用 Weitzenbock 公式可得：不存在 $\alpha\in L^q_k\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ 及 $\lambda>0$，使得 $\Delta\alpha=\lambda\alpha$. 这样就完成了定理 2 的证明.

第四章 某些典型群和对称空间的热核

陆启铿教授在[6]和[7]中分别显式构造出了 C^n 中单位多圆盘和单位复超球的热核. 陆启铿教授又与洪毅教授合作构造出了第一类典型域$\mathscr{R}_I(m,n)$的热核. 随后洪毅教授显式构造出了D^n, S^n, CP^n及QP^n的热核. 汪国强教授与洪毅教授又构造出了四元数双曲空间、四元数第Ⅲ类典型域、复Grassmann流形以及酉辛群的热核. 在本章中, 我们显式构造出了酉群和特殊酉群的热核. 作为应用, 我们完全定出了酉群的谱.

§4.1 Lie 群

关于这一节, 详细内容请参见[35]、[36]、[37]、[38]等. 我们仅简单地介绍一下 Lie 群的基本概念.

定义 1 设集合 G 上存在一个仿紧的 C^∞ 流形结构和一个群结构, 使得群乘法:

$$G\times G\to G$$
$$(x,y)\mapsto xy$$

及逆运算

$$G\to G$$
$$x\mapsto x^{-1}$$

都是 C^∞ 的．当 G 为实微分流形时，G 称为实 Lie 群；当 G 为复流形时，G 称为复 Lie 群．

例1 一般线性群 $GL(n,R)$ 和 $GL(n,C)$．

$GL(n,R)=\{A\,|\,A$ 为 $n\times n$ 实方阵，$\det A\neq 0\}$．

我们把 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 视为 R^{n^2} 中的点，

$(a_{11},\ \cdots,\ a_{1n},\ a_{21},\ \cdots,\ a_{2n},\ \cdots,\ a_{n1},$

$\cdots,\ a_{nn})\in R^{n^2}$．

由于 $A\mapsto\det A$ 为 C^∞ 映射(实际上也是实解析的)，所以 $GL(n,R)=\det^{-1}(R-\{0\})$ 为 R^{n^2} 中的 C^∞ (实解析)开子流形．$GL(n,R)$ 的群乘法即为通常的矩阵乘法，其单位元素即为 $n\times n$ 单位方阵 I．下面我们说明群运算为实解析的．实事上，设

$$A=(a_{ij})_{n\times n},\quad B=(b_{ij})_{n\times n}\in GL(n,R),$$

则 $A\cdot B=(c_{ij})_{n\times n}$，其中 $c_{ij}=\sum\limits_{l=1}^{n}a_{il}b_{lj}$．显然 c_{ij} 为 a_{ik} 和 b_{kj} 的多项式，从而乘法运算为实解析的．另外，设 $A^{-1}=(d_{ij})_{n\times n}$，由线性代数知识知 $d_{ij}=A_{ij}/\det A$，$\det A\neq 0$．根据行列映射 $\det$：$GL(n,R)\to R$ 为实解析的，A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式，它也是 A 中元素的多项式．所以群 $GL(n,R)$ 的求逆运算也为实解析的．由此可见 $GL(n,R)$ 为 n^2 维实 Lie 群．称它为 n 次实一般线性群．

同样，$n\times n$ 阶非退化复矩阵所成的乘法群 $GL(n,C)$ 为 $2n^2$ 维实 Lie 群，称它为 n 次复一般线性群．

为了给出更多有意义的矩阵 Lie 群，并且避免使用 Lie 群论中一些深刻结果，如著名的 É. Cartan 定理：Lie 群的闭子群必为 Lie 子群．我们首先定义一个所谓 Cayley 变换，

使用它我们给出矩阵群的流形结构.

定义 2 实 $n\times n$ 方阵 A 称为非例外的，若

$$\det(I+A)\neq 0 .$$

全体非例外矩阵记为 $A^{\circ}(n)$.

定义 3 对非例外矩阵 A，定义

$$A^{\#}=(I-A)(I+A)^{-1}. \tag{1.1}$$

$A^{\#}$ 称为 A 的 Cayley 像. #称为 Cayley 变换.

引理 1 Cayley 变换

$$\#: A^{\circ}(n)\longrightarrow A^{\circ}(n)$$
$$A\mapsto\#(A)=A^{\#}$$

为 $A^{\circ}(n)$ 的光滑自同胚，并且对合.

证明：全体 $n\times n$ 实方阵记为 $M(n,\mathrm{R})$，它与 R^{n^2} 视为等同，因而自然为 C^{∞} 流形. 而 $A^{\circ}(n)$ 显然为 $M(n,\mathrm{R})$ 的开子集. 所以为 C^{∞} 流形.

我们还要验证：对于任何 $A\in A^{\circ}(n)$，有 $A^{\#}\in A^{\circ}(n)$. 记 $A^{\#}=B$，则

$$\begin{aligned}I+B&=I+A^{\#}=I+(I-A)(I+A)^{-1}\\&=[(I+A)+(I-A)](I+A)^{-1}\\&=2(I+A)^{-1},\end{aligned} \tag{1.2}$$

因此有

$$\det(I+A^{\#})=\det 2(I+A)^{-1}=2^{n}[\det(I+A)]^{-1}\neq 0,$$

即 $A^{\#}\in A^{\circ}(n)$.

同时我们还有

$$\begin{aligned}I-B&=I-A^{\#}=I-(I-A)(I+A)^{-1}\\&=[(I+A)-(I-A)](I+A)^{-1}\\&=2A(I+A)^{-1}.\end{aligned} \tag{1.3}$$

所以得 $\qquad (A^{\#})^{\#} = B^{\#} = (I-B)(I+B)^{-1}$

$$= 2A(I+A)^{-1}\cdot\frac{1}{2}(I+A) = A,$$

即#为对合的．另外 $A \mapsto A^{\#}$ 显然是 C^{∞} 的，所以#为 $A^{\circ}(n)$ 的自同胚．引理得证．

例 2 正交群 $O(n) = \{A \mid A \in GL(n,\mathbb{R}),\ AA^T = I\}$.

$O(n)$ 的群运算仍是通常的矩阵乘法与矩阵求逆．下面我们要给出 $O(n)$ 的流形结构，从而使之成为 Lie 群．设 A 为非例外的正交方阵，$B = A^{\#}$．根据 $A^T = A^{-1}$，我们有

$$\begin{aligned}
B^T &= [(I-A)(I+A)^{-1}]^T = (I+A^T)^{-1}(I-A^T)\\
&= (I+A^{-1})^{-1}(I-A^{-1}) = (I+A^{-1})^{-1}A^{-1}A(I-A^{-1})\\
&= (A(I+A^{-1}))^{-1}(A-I) = (A+I)^{-1}(A-I)\\
&= -(I-A)(I+A)^{-1} = -B.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

反过来，若 B 为反对称方阵，即 $B^T = -B$．据线性代数知：反对称实方阵的非零特征值均为纯虚数，因此

$$\det(I+B) = \det(I-B) \neq 0,$$

即反对称实方阵为非例外的．

设 $B^T = -B$，由于#为对合变换，则有

$$\begin{aligned}
A^T &= [(I-B)(I+B)^{-1}]^T = (I+B^T)^{-1}(I-B^T)\\
&= (I-B)^{-1}(I+B) = [(I+B)(I-B)^{-1}]\\
&= A^{-1}.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

由(1.4)式及(1.5)式知：

引理 2 非例外矩阵 A 为正交的充要条件是其 Cayley 像为反对称方阵．

习知：全体反对称 $n\times n$ 实方阵为一个维数为 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 的实线性空间，我们把它视为与 $\mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ 等同．

记 $U_{\circ}$为全体 $n\times n$ 非例外的正交矩阵，显然 $I\in U_{\circ}$，则 Cayley 变换 $A\mapsto A^{\#}$ 把 $U_{\circ}$一一映到全体 $n\times n$ 实反对称矩阵所成的集合 $S(n)$. 由引理 2 可知：$U_{\circ}$同胚于 $S(n)$ 中开集 $\#(U_{\circ})$，因此$(U_{\circ}, \#)$可看作 $O(n)$的一个局部坐标系.

设 $o\in O(n)$，$U_{\circ}\cdot o=\{A\cdot o | A\in U_{\circ}\}$，$o\in U_{\circ}\cdot o$，即 $U_{\circ}\cdot o$ 为 o 的一个邻域. 考虑

$$U_{\circ}\cdot o\longrightarrow S(n)$$
$$A\cdot o\mapsto A^{\#}$$

显然 $U_{\circ}o$，$o\in O(n)$覆盖正交群 $O(n)$. 设 o_1，$o_2\in O(n)$为固定的正交阵，若 $A_1o_1=A_2o_2$，A_1，$A_2\in U_{\circ}$，经简单计算得

$$A_1=(I-A_2{}^{\#})(I+A_2{}^{\#})^{-1}o_2o_1{}^T,$$

因此有 $A_1{}^{\#}=f(A_2{}^{\#})$. 其中 f 为依赖于 o_1, o_2 的有理函数，因而是 C^{∞} 光滑的. 所以任何两个坐标系 $U_{\circ}o_1$，$U_{\circ}o_2$ 彼此相容. 因此它们的全体构成 $O(n)$ 的图册. 所以 $O(n)$ 为一个$\frac{1}{2}n(n-1)$ 维微分流形. 下面我们说明群运算为 C^{∞} 的. 由于两矩阵的积的 Cayley 像为这两个因子矩阵的 Cayley 像的有理函数(直接可以显式表出)，因此 $O(n)$ 中群乘法为 C^{∞} 的. 另外，对于 $O(n)$ 中的求逆运算显然为 C^{∞} 的. 故 $O(n)$ 为 Lie 群.

上面例子的证明可推广到比较一般的情形：一个矩阵群 G，若 G 中非例外矩阵的 Cayley 像全体与某个矩阵空间的子空间相同，则类似地可赋于 G 流形结构.

例 3 实线性辛群 $SP(m, R)$ $(m=2n)$. 其中

$$SP(m, R)=\{A\in GL(m, R) | A^TJA=J\}.$$

$$J=\begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix},\ I \text{ 为 } n\times n \text{ 单位矩阵.}$$

首先 SP(m,R) 为一个矩阵群，对于任何 A，$B\in$SP(m,R)，

$$(AB)^TJ(AB)=B^T(A^TJA)B=B^TJB=J,$$

所以 $AB\in$SP(m,R)．另外我们由

$$\det(J)=\det(A^TJA)$$

得 $\det A=\pm1$，故 A 非奇异．并且

$$(A^{-1})^TJ(A^{-1})^T=(A^{-1})^T(A^TJA)A^{-1}=J.$$

因此可知：SP(m,R)为矩阵群．

对于 $m\times m$ 非例外矩阵 A，A满足 $A^TJA=J$ 的充要条件为

$$(A^\#)^TJ=-JA^\#. \tag{1.6}$$

事实上，若 A满足 $A^TJA=J$，则

$$\begin{aligned}(A^\#)^TJ&=(I+A^T)^{-1}(I-A^T)J\\&=(I+JA^{-1}J^{-1})^{-1}(I-JA^{-1}J^{-1})J\\&=J(I+A^{-1})^{-1}J^{-1}J(I-A^{-1})J^{-1}J\\&=J(I+A^{-1})^{-1}(I-A^{-1})\\&=J(I+A^{-1})^{-1}A^{-1}A(I-A^{-1})\\&=J(I+A)^{-1}(A-I)=-JA^\#.\end{aligned} \tag{1.7}$$

反过来，$B=A^\#$，并且$A^\#$满足（1.6），则有

$$\begin{aligned}A^TJA&=(B^\#)^TJB^\#\\&=(I+B^T)^{-1}(I-B^T)J(I-B)(I+B)^{-1}\\&=(I+B^T)^{-1}J(I+B)(I+B)^{-1}(I-B)\\&=(I+B^T)^{-1}J(I-B)\\&=(I+B^T)^{-1}(I+B^T)J=J.\end{aligned} \tag{1.8}$$

由于(1.6)式是线性的，因此 $(m=2n)$

$$H_m=\{B\in M(m,\mathrm{R})\mid B^TJ=-JB\}$$

为一线性空间．因此 $SP(2n,\mathrm{R})$ 为一实 Lie 群．

我们用 $M(n,\mathrm{C})$ 记全体 $n\times n$ 复矩阵所成的集合，把它与 C^{n^2} 等同，因而是一复流形．同样可以定义复非例外矩阵．我们把 Cayley 变换的概念直接推广到复的情形．

例4 酉群 $U(n)=\{A\in GL(n,\mathrm{C})\mid \bar{A}^{T}A=I\}$．

对于非例外的复 $n\times n$ 矩阵 A，它为酉矩阵的充要条件是：它的 Cayley 像 $A^{\#}$ 为反 Hermite 方阵，即 $(\overline{A^{\#}})^{T}=-A^{\#}$．而全体 $n\times n$ 阶反 Hermite 方阵所成的集合为一个实维数是 n^2 的线性空间，所以 $U(n)$ 为维数是 n^2 的 Lie 群．

例5 复辛群 $SP(m,\mathrm{C})$ 及酉辛群．

与例 3 完全相同可以定义复辛群 $SP(m,\mathrm{C})$，所谓酉辛群即是 $SP(m,\mathrm{C})$ 与酉群 $U(2m)$ 的交．可以证明：$SP(m,\mathrm{C})\cap U(2m)$ 中的非例外矩阵的 Cayley 像为形如

$$\begin{bmatrix} C & D \\ -D & C \end{bmatrix}$$

的矩阵，其中 C,D 均为 $m\times m$ 复方阵，并且 D 为 Hermite 的，C 为反 Hermite 的．显然它们构成一个维数为 $m(2m+1)$ 的实线性空间，故 $SP(m,\mathrm{C})\cap U(2m)$ 为 $m(2m+1)$ 维的 Lie 群．

下面我们引进齐性流形的概念．

定义 4 设 G 为 Lie 群，M 为 C^∞ 微分流形．Lie 群 G 称为 M 上的 Lie 变换群，或者称 Lie 群（左方）作用于 M 上，如果存在 C^∞ 映射 F：

$$F:\ G\times M\longrightarrow M$$
$$(g,p)\mapsto E(g,p)\overset{\text{def}}{=}gp$$

满足下列条件：

(1) $ep=p$，$p\in M$，e 为 G 的单位元．

（2） $g_1(g_2p)=(g_1\cdot g_2)p$， $p\in M$， g_1， $g_2\in G$.

如果对于任意 $p\in M$, $F(g,p)=gp=p$ 必然有 $g=e$, 则称 G 在 M 上的作用是有效的．对于固定点 $p\in M$， $G_p=\{g\in G|gp=p\}$， 显然 G_p 为 G 的闭子群．据 E. Cartan 定理知，它为 G 的闭 Lie 子群．称它为 G 在 p 点的迷向子群．

定义 5 设 Lie 群 G （左方） 作用在 C^∞ 流形 M 上． 对于固点 $p\in M$， 称 M 中的子集

$$M_p=\{gp\mid g\in G\}$$

为通过 p 点的轭道．若 $M_p=M$， 即对于任何 M 上两点 p 和 q，存在 $g\in G$， 使得 $gp=q$， 那么我们就称 G 在 M 上的作用是可递的（或可迁的），这时称 M 为 G 的齐性流形，简称 M 为齐性空间．

下面简单介绍一下 Lie 群 G 的 Lie 代数的概念．为此引进一些必要定义．

对于 Lie 群 G 中任一元素 g， 定义

$$L_g:\ x\mapsto gx,\qquad \forall x\in G$$

及

$$R_g:\ x\mapsto xg,\qquad \forall x\in G$$

则它们都是 Lie 群 G 的 C^∞ 微分自同胚． L_g 称为左平移， R_g 称为右平移．它们有下述性质

$$L_g^{-1}=L_{g^{-1}},\qquad R_g^{-1}=R_{g^{-1}},\qquad \forall g\in G.$$

记

$$Ad_g=L_gR_g^{-1},\quad \forall g\in G.$$

则 Ad_g 不仅是 G 的 C^∞ 自同胚，而且是 Lie 群 G 的代数同构．

定义6 连通 Lie 群 G 上向量场 X 称为左不变向量场，若

$$dL_g(X)=X,\qquad \forall g\in G.$$

亦即 $$dL_g(X_a)=X_{ga}, \qquad \forall a\in G.$$

引理 3 连通 Lie 群 G 上的所有左不变向量场所构成的线性空间 $\mathscr{G}$，它在换位运算

$$[X,Y]=XY-YX \tag{1.8}$$

下构成 Lie 代数，称它为 Lie 群 G 的 Lie 代数.

证明： 显然 $\mathscr{G}$ 为线性空间. 由于 $dL_g(X)=X$, $dL_g(Y)=Y$，$\forall X, Y\in\mathscr{G}$，所以我们有

$$dL_g([X,Y])=[dL_g(X),dL_g(Y)]=[X,Y].$$

这就证明了 $\mathscr{G}$ 在换位运算(1.8)下构成 Lie 代数. 引理证完.

命题 1 连通 Lie 群 G 的 Lie 代数 $\mathscr{G}$ 与 $T_e(G)$ 有一自然的线性同构

$$X\mapsto X|_e=X_e, \qquad \forall X\in\mathscr{G}.$$

在 $T_e(G)$ 中引进换位运算：

$$[X_e, Y_e]=[X,Y]|_e \quad \forall X_e, Y_e\in T_e(G).$$

则这个线性同构为 Lie 代数的同构，所以 n 维 Lie 群 G 的 Lie 代数 $\mathscr{G}$ 为 n 维 Lie 代数.

证明： 对于任何 $X\in\mathscr{G}$，有

$$dL_g(X)=X, \qquad \forall g\in G.$$

我们任取 $a\in G$，则有 $dL_g(X_a)=X_{ga}$，这里 X_b 为左不变向量场 X 在点 b 的值，即 $X_b\in T_b(G)$. 特别地取 $a=e$，则有

$$dL_g(X_e)=X_g, \qquad \forall g\in G.$$

由此可知，左不变向量场 $X\in\mathscr{G}$ 在任一点 $g\in G$ 的值由它在单位元 e 的值 $X_e\in T_e(G)$ 唯一确定.

反过来，任取 $X_e\in T_e(G)$，则 $dL_g(X_e)=X_g$ 为 $T_g(G)$ 的一个向量. 当 g 遍历 G 时，我们就得到 G 上的切向量场

X. 下面我们要说明 X 是 G 上左不变向量场. 事实上, 由于左平移 L_g 为 G 的 C^∞ 同胚, 所以 $g \mapsto dL_g(X_e) = X_g$ 为 G 上 C^∞ 光滑的向量场. 剩下要证的是 X 为左不变的. 这是因为对于任何 $a \in G$, 有

$$dL_a(X_g) = dL_a(dL_g(X_e)) = dL_a \cdot dL_g(X_e)$$
$$= dL_{ag}(X_e) = X_{ag}, \qquad \forall g \in G.$$

这就证明了 $dL_a(X) = X$, $\forall a \in G$. 即 $X \in \mathscr{G}$. 命题得证.

设 G 为 n 维实 Lie 群, 其 Lie 代数 $\mathscr{G}$ 则是实数域 R 上的 n 维 Lie 代数. 设 $X_1, \cdots, X_n$ 为 $\mathscr{G}$ 的基. 由于对于 $1 \geqslant i$, $j \geqslant n$, $[X_i, X_j] \in \mathscr{G}$, 则我们可令

$$[X_i, X_j] = \sum_k C_{ij}^k X_k, \qquad (1.9)$$

其中 C_{ij}^k 称为 $\mathscr{G}$ 的(关于基 $X_1, \cdots, X_n$)结构常数. 显然 $\mathscr{G}$ 的换位运算由(1.9)式完全确定, 即由 $\mathscr{G}$ 的结构常数所决定.

设 $g \in G$, 考虑 Lie 群 G 的内自同构 Ad_g.

记 $\qquad Ad(g) \overset{\text{def}}{=\!=} dAd_g: \ T_eG \to T_eG.$

我们把 $\mathscr{G}$ 和 T_eG 视为等同, 则得到一个映射

$$Ad: \ G \to \mathrm{Aut}(\mathscr{G})$$
$$g \mapsto Ad(g)$$

显然 Ad 是群同态, 这是因为任取 $g_1, g_2 \in G$, 则

$$Ad(g_1 \cdot g_2) = d(Ad_{g_1 \cdot g_2}) = d(Ad_{g_1} \circ Ad_{g_2})$$
$$= dAd_{g_1} \circ dAd_{g_2} = Ad(g_1) \circ Ad(g_2).$$

在局部坐标系下, Ad 由局部坐标的光滑函数给出. 因此 Ad: $G \to \mathrm{Aut}(\mathscr{G}) \simeq \mathrm{GL}(n, \mathrm{R})$ 为 Lie 群的同态, 即为 Lie 群 G 在 $\mathscr{G}$ 的上表示, 称它为 n 维 Lie 群的伴随表示.

我们把 Ad 的微分 $d(Ad)$ 记为 ad, $\mathscr{G} \to \mathrm{End}(\mathscr{G})$ (其中

$End(\mathscr{G})$记$\mathscr{G}$上的所有线性映射所成的线性空间）依

$$[A,\ B]=AB-BA\quad A,\ B\in End(\mathscr{G})$$

构成Lie代数．$Aut(\mathscr{G})\subset End(\mathscr{G})$记$End(\mathscr{G})$中非奇异的线性映射的全体．$Aut(\mathscr{G})$与$GL(n,\ R)\ (n=\dim\mathscr{G})$微分同胚，因此$Aut(\mathscr{G})$具有流形结构并且按复合运算成为一Lie群，$End(\mathscr{G})$可看作$Aut(\mathscr{G})$的Lie代数．

命题2 设G是n维Lie群，其Lie代数为$\mathscr{G}$．设$X,Y\in\mathscr{G}$，则有

$$ad(X)(Y)=ad_X(Y)=[X,\ Y].$$

上面命题的证明需要较多的Lie群知识，这里略去其证明．有兴趣者可参见[38]，[82]等．

定义7 设Lie群G的Lie代数为$\mathscr{G}$，$\mathscr{G}$上的对称双线性函数

$$B(X,\ Y)=T_r(ad_X\cdot ad_Y),\qquad \forall X,\ Y\in\mathscr{G}$$

称为Lie代数$\mathscr{G}$的Killing型．也称为Lie群的Killing型．

Lie群G自然是C^∞流形，我们可以在G上赋于Riemann度量．为了使G的几何与其群结构联系起来，我们就讨论所谓左不变的Riemann内积．所谓左不变，即对于任何$g\in G$，X，Y为G上的切向量场，有

$$\langle dL_g(X),dL_g(Y)\rangle=\langle X,\ Y\rangle.$$

事实上，G上左不变的度量与其Lie代数$\mathscr{G}$上的内积（或$T_e(G)$上内积）是一回事．若$\langle\ ,\ \rangle$为G上的左不变度量，则$\langle X,Y\rangle=\langle X_e,Y_e\rangle$为常数．因此定义了$\mathscr{G}$上内积．反之，若$\langle\ ,\ \rangle$为$T_e(G)$上的内积，定义

$$\langle X,\ Y\rangle=\langle dL_{g^{-1}}(X),dL_{g^{-1}}(Y)\rangle,\quad X,\ Y\in T_g(G)$$

给出了G上一个左不变度量．G上的度量若既是左不变又

是右不变的，称它为双不变的.

命题 3 设连通 Lie 群 G 的 Lie 代数为 $\mathscr{G}$，G 上左不变度量记为$\langle\ ,\ \rangle$，则下面条件等价：

(1) $\langle\ ,\ \rangle$为右不变，因而是双不变的；

(2) $\langle\ ,\ \rangle$为 $Ad(G)$不变；

(3) 逆映射 $G\to G$，$g\to g^{-1}$ 为 G 的等距；

(4) $\langle X,[Y,\ Z]\rangle=\langle[X,\ Y],Z\rangle, X,Y,Z\in\mathscr{G}$；

(5) $\nabla_XY=\dfrac{1}{2}[X,\ Y],\quad X,\ Y\in\mathscr{G}$；

(6) G 中从单位元 e 出发的测地线即 G 的单参子群.

证明：所谓 G 的单参子群是一个 C^∞ 同态 $R\to G$.

(1)⇔(2)：由于 Ad_g：$G\to G$，$Ad_g=L_g\circ R_{g^{-1}}$，因此

$$Ad(g)=dAd_g=dL_g\cdot dR_{g^{-1}},$$

而且 $dL_g(X)=X$，$X\in\mathscr{G}$. 当 g 遍历 G 时就证明(1)与(2)等价.

(1)⇔(3)：记 G 中逆映射为φ：$G\to G$，$\varphi(g)=g^{-1}$，$\forall g\in G$. 对于 G 的任何单参子群 α：$R^1\to G$，由于 α 为同态，所以有

$$\alpha(-t)=(\alpha(t))^{-1},\quad \forall t\in R^1.$$

因此 $\varphi(\alpha(t))=\alpha(-t)$，$t\in R^1$. 并且由于 $\alpha(0)=e$，所以我们得 $(d\varphi)_e=-Id$. 据$\varphi=R_{g^{-1}}\cdot\varphi\cdot L_{g^{-1}}$，我们得

$$d\varphi_g:\ T_g(G)\to T_{g^{-1}}(G), g\in G,$$

$$d\varphi_g=dR_{g^{-1}}\cdot d\varphi_e\cdot dL_{g^{-1}}=-dR_{g^{-1}}\cdot dL_{g^{-1}}.$$

因此(1)⇒(3). 反过来，由于 $R_g=\varphi\cdot L_{g^{-1}}\cdot\varphi$，马上可得(3)⇒(1).

(2)⇔(4)：由引理 3([81],P302) 即知(2)与(4)等价.

(4) $\Leftrightarrow$ (5)：由于内积为双不变的，故对于任何 X，$Y \in \mathscr{G}$，则 $\langle X, Y\rangle$ 为常数．因此我们利用§1.3中公式(3.4)可得

$$2\langle\nabla_X Y, Z\rangle = -\langle X,[Y,Z]\rangle + \langle Y,[Z,X]\rangle + [Z,[X,Y]\rangle,$$

其中 ∇ 为由双不变度量所决定的 Riemann 联络．又据(4)知：

$$\langle Y, [Z, X]\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle = 0,$$

所以有 $2\langle\nabla_X Y, Z\rangle = \langle[X, Y],Z\rangle$，即

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y], \quad X, Y \in \mathscr{G}.$$

(5) $\Leftrightarrow$ (6)：如果(5)成立，则有 $\nabla_X X = 0$，$X \in \mathscr{G}$．设 α: $R^1 \to G$ 为 G 的单参子群，$\alpha' \in \mathscr{G}$，因此 $\nabla_{\alpha'}\alpha' = 0$，即 $\alpha(t)$ 为 G 的测地线．反之，设 α 为 G 的任一测地线，并且它从 e 出发．由(6)知它是 G 的单参子群．首先对于任何 $X \in \mathscr{G}$，则有单参子群 $\alpha_X(t)$，使得 $\alpha'_X(t) = X$．因此我们有 $\nabla_X X = 0$．利用极化(polarization)，对于任何 X，$Y \in \mathscr{G}$，有

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{X+Y}(X+Y) = \nabla_X X + \nabla_X Y + \nabla_Y X + \nabla_Y Y \\ &= \nabla_X Y + \nabla_Y X = 2\nabla_X Y - [X, Y] = 0. \end{aligned}$$

即 $\quad \nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$．命题 3 得证．

命题 4 设 G 为 Lie 群，其上有双不变的 Riemann 度量，则其 Riemann 联络与 Riemann 曲率为：

(1) $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y], \quad X, Y \in \mathscr{G}$；

(2) $R(X, Y)Z = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z], X, Y, Z \in \mathscr{G}$；

(3) 若 X 和 Y 张成的平面非退化，则截曲率为

$$K(X,\ Y)=\frac{1}{4}\frac{\langle[X,\ Y],[X,\ Y]\rangle}{\langle X,\ X\rangle\langle Y,\ Y\rangle-\langle X,\ Y\rangle^2}.$$

证明：(1)即为上个命题的(5)，下面只须证明(2)和(3)．首先证明(2)．由于$\nabla_XY=\frac{1}{2}[X,\ Y],X,\ Y\in\mathscr{G}$，则对于任何 $X,\ Y,\ Z\in\mathscr{G}$，有

$$R(X,\ Y)Z=\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_{[X,Y]}Z$$

$$=\frac{1}{4}[X,[Y,\ Z]]-\frac{1}{4}[Y,[X,\ Z]]-\frac{1}{2}[[X,\ Y],Z].$$

利用 Jacobi 恒等式，即可得

$$R(X,\ Y)Z=-\frac{1}{4}[[X,\ Y],Z]=\frac{1}{4}[Z,[X,\ Y]].$$

直接计算立即可得(3)．

显然，若 G 为 Abel 群，由 Lie 群论的结论知其 Lie 代数$\mathscr{G}$交换，所以 $K=0$，而一般情形总有 $K\geqslant 0$．下面讨论 G的 Ricci 曲率．由于对于任何 $X,\ Y,\ V\in\mathscr{G}$，有

$$R(X,\ V)Y=\frac{1}{4}[V,[X,\ V]],$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X,\ Y)&=\mathrm{tr}\{V\to -R(X,\ V)Y\}\\&=\mathrm{tr}\{V\to R(V,\ X)Y\}\\&=\frac{-1}{4}\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_Y\mathrm{ad}_X)=\frac{-1}{4}B(X,\ Y),\end{aligned}$$

其中 B 为 Lie 群 G 的 Killing 型．

Lie 群半单的充要条件是其 Killing 型非退化．易见 G 的($\mathscr{G}$ 的)Killing 型为 $Ad(G)$不变的．因此对于半单 Lie 群

G，它上面的 Killing 型是双不变的，进而给出 G 一个双不变的半 Riemann(sub-riemann)度量.

对于连通的 Lie 群，可以证明：若 G 紧致，则它的 Killing 型半负定. 反之，若 G 的 Killing 型负定，则 G 必然紧致.

在这一节中，我们只介绍了一些基本概念，给出了一些 Lie 群的例子. 事实上，Lie 群理论十分丰富，有兴趣者可参阅[35]、[38]等.

§4.2 酉群与特殊酉群的热核

我们记

$$U(n)=\{u\in GL(n, C)\mid u\bar{u}^T=I\}$$

为 n 次酉群. 它是实维数为 n^2 的Lie 群. 周知 $U(n)$不是一个不可约 Lie 群，它的子群

$$SU(n)=\{u\in U(n)\mid \det u=1\}$$

是一个实维数为 n^2-1 的不可约 Lie 群.

习知，酉群上存在不变微分度量

$$ds^2=\frac{1}{4}\operatorname{tr}(\delta u\cdot\overline{\delta u}^T),\tag{2.1}$$

其中 $\delta u=u^{-1}du$.

度量(2.1)自然诱导出一个 $SU(n)$ 上的不变微分度量. 今后所讨论的 $SU(n)$ 上的不变度量均指这一个诱导度量.

酉群上的不变度量(2.1)对应的 Laplace-Beltrami 算子 Δ 当然也是不变的. 由 Δ 所对应的热方程

$$\Delta u(x,\ t) = \frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t},\ u(x,\ t) \in C^2(U(n) \times R^1)$$

的基本解就称为酉群 $U(n)$ 的热核. 详细定义可见第三章.

设 $u \in U(n)$ 且 $\det(I+u) \neq 0$, 则变换

$$H = \sqrt{-1}(I-u)(I+u)^{-1} \tag{2.2}$$

有逆变换

$$u = (I+\sqrt{-1}H)(I-\sqrt{-1}H)^{-1}, \tag{2.3}$$

其中 $H \in H_n = \{A \in GL(n,\ C) \mid \bar{A}^T = A\}$.

换言之, 除去 $U(n)$ 中一个超曲面 $\{\det(U+I)=0\}$ 外, 变换(2.3)是一个1-1的实解析映射, 即变换(2.3)是一个把 $U(n)-\{\det(I+U)=0\}$ 1-1地映到 H_n 上的实解析映射.

由恒等式

$$0 = d(\bar{u}^T u) = \bar{u}^T du + d\bar{u}^T \cdot u, \quad u \in U(n).$$

得 $\overline{\delta u}^T = -\delta u$, 据(2.3)式, 有

$$\begin{aligned} du &= i dH(I-iH)^{-1} + i(I+iH)(I-iH)^{-1} dH(I-iH)^{-1} \\ &= i[(I-iH)+(I+iH)](I-iH)^{-1} dH \cdot (I-iH)^{-1} \\ &= 2i(I-iH)^{-1} dH \cdot (I-iH)^{-1}, \end{aligned}$$

其中 $i=\sqrt{-1}$.

由此我们得

$$\delta u = \bar{u}^T du = 2i(I+iH)^{-1} dH \cdot (I-iH)^{-1},$$

故不变微分度量(2.1)可写为

$$ds^2 = \mathrm{tr}\{(I+H^2)dH \cdot (I+H^2)^{-1} dH\}. \tag{2.4}$$

对于 Hermite 方阵 $H \in H_n$, 则 H 有如下分解:

$$H = V \cdot \Lambda \cdot \bar{V}^T, \tag{2.5}$$

其中 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n)$. $\lambda_j (1 \leqslant j \leqslant n)$ 为 H 的特征值, 全

为实数，$A\in U(n)/[U(1)]^n$ 并且 V 的对角线上的元素均为零.

这种分解的存在性可以直接证明，也可参见[8].

置 $\lambda_j=\tan r_j$，$1\leqslant j\leqslant n$. 我们称 $(r_1, \cdots r_n, V)$ 为 $U(n)$ 的矩阵极坐标系. 对于微分方程组 $d\theta=\delta u$，利用 Pfaff 理论，我们可以选取 $n(n-1)$ 个无关的实参数 $\theta_1, \cdots, \theta_{n(n-1)}$ 来表示 V，即 $\theta_1, \cdots, \theta_{n(n-1)}$ 为 $U(n)/[U(1)]^n$ 的局部坐标系. 从而 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \theta_1\cdots, \theta_{n(n-1)}\}$ 构成酉群 $U(n)$ 的局部坐标系. 注意到该局部坐标系的坐标邻域差一个超曲面 $\{\det(I+u)=0\}$ 完全覆盖了 $U(n)$，而超曲面 $\{\det(I+u)=0\}$ 为低一维的子簇. 因此今后讨论在该局部坐标系下进行即可. 我们也把 $\{r_1, \cdots r_n, \theta_1, \cdots, \theta_{n(n-1)}\}$ 称为酉群 $U(n)$ 的矩阵极坐标系.

引理1 酉群 $U(n)$ 的不变微分度量 (2.1) 在矩阵坐标系下可写为

$$ds^2=\sum_{j=1}^{n} dr_j^2+2\sum_{j<k}\sin^2(r_j-r_k)|\delta v_{jk}|^2, \tag{2.6}$$

其中 $\delta V=(\delta v_{jk})$.

$U(n)$ 的体积元素为

$$\dot{U}=\varphi_0(\theta)\prod_{j<k}\sin^2(r_j-r_k)dr_1\wedge\cdots$$

$$\wedge dr_n\wedge d\theta_1\wedge\cdots\wedge d\theta_{n(n-1)}, \tag{2.7}$$

其中 $\varphi_0(\theta)$ 为仅依赖于 $\theta_1, \cdots, \theta_{n(n-1)}$ 的函数.

对应的 Laplace-Beltrami 算子 Δ 为

$$\Delta=\frac{1}{\omega_n^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial r_j}\left(\omega_n^2\cdot\frac{\partial}{\partial r_j}\right)$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{n(n-1)}\frac{1}{\varphi_0(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\left(g^{\alpha\beta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta_\beta}\right),\qquad(2.8)$$

其中 $\omega_n=\prod_{1\leqslant j<k\leqslant n}\sin(r_j-r_n)$. $g^{\alpha\beta}\cdot g_{\beta\gamma}=\delta^\alpha_\gamma$，而 $g_{\beta\gamma}$ 为(2.6)式中 $\theta_\beta\otimes\theta_\gamma$ 的系数.

证明： 微分(2.5)两边有

$$dH=dV\cdot\Lambda\cdot\bar{V}^T+V\cdot d\Lambda\cdot\bar{V}^T+V\cdot\Lambda\cdot d\bar{V}^T$$
$$=V\cdot[\delta V\cdot\Lambda+d\Lambda+\Lambda\cdot\overline{\delta V}^T]\bar{V}^T.$$

因此有

$$(I+H^2)^{-1}dH=V(I+\Lambda^2)^{-1}[\delta V\cdot\Lambda+d\Lambda$$
$$+\Lambda\cdot\overline{\delta V}^T]\bar{V}^T.$$

由(2.4)式得

$$ds^2=\mathrm{tr}\{(I+H^2)^{-1}dH\cdot(I+H^2)^{-1}dH\}$$
$$=\mathrm{tr}\{(I+\Lambda^2)^{-1}\cdot\delta V\cdot\Lambda\cdot(I+\Lambda^2)^{-1}\delta V\cdot\Lambda\}$$
$$+\mathrm{tr}\{(I+\Lambda^2)^{-1}\delta V\cdot\Lambda\cdot(I+\Lambda^2)^{-1}d\Lambda\}$$
$$+\mathrm{tr}\{(I+\Lambda^2)^{-1}\delta V\cdot\Lambda\cdot(I+\Lambda^2)^{-1}\cdot\Lambda\cdot\overline{\delta V}^T\}$$
$$+\mathrm{tr}\{(I+\Lambda^2)^{-1}d\Lambda(I+\Lambda^2)^{-1}\delta V\cdot\Lambda\}$$
$$+\mathrm{tr}\{(I+\Lambda^2)^{-1}d\Lambda\cdot(I+\Lambda^2)^{-1}d\Lambda\}$$
$$+\mathrm{tr}\{(I+\Lambda^2)^{-1}d\Lambda\cdot(I+\Lambda^2)^{-1}\cdot\Lambda\cdot\overline{\delta V}^T\}$$
$$+\mathrm{tr}\{(I+\Lambda^2)^{-1}\cdot\Lambda\cdot\overline{\delta V}^T\cdot(I+\Lambda^2)^{-1}\delta V\cdot\Lambda\}$$
$$+\mathrm{tr}\{(I+\Lambda^2)^{-1}\cdot\Lambda\cdot\overline{\delta V}^T\cdot(I+\Lambda^2)^{-1}d\Lambda\}$$
$$+\mathrm{tr}\{(I+\Lambda^2)^{-1}\cdot\Lambda\cdot\overline{\delta V}^T\cdot(I+\Lambda^2)^{-1}\cdot\overline{\delta V}^T\},$$

由于 $\overline{\delta V}^T=-\delta V$，所以有

$$
\begin{aligned}
ds^2 = &\operatorname{tr}\{(I+\Lambda^2)^{-1}\delta V\cdot\Lambda\cdot(I+\Lambda^2)^{-1}\delta V\cdot\Lambda\}\\
&+\operatorname{tr}\{(I+\Lambda^2)^{-1}\delta V\cdot\Lambda\cdot(I+\Lambda^2)^{-1}\cdot\Lambda\cdot\delta V^T\}\\
&+\operatorname{tr}\{(I+\Lambda^2)^{-1}d\Lambda\cdot(I+\Lambda^2)^{-1}d\Lambda\}\\
&+\operatorname{tr}\{(I+\Lambda^2)^{-1}\Lambda\cdot\delta V^T\cdot(I+\Lambda^2)^{-1}\delta V\cdot\Lambda\}\\
&+\operatorname{tr}\{(I+\Lambda^2)^{-1}\cdot\Lambda\cdot\overline{\delta V}^T\cdot(I+\Lambda^2)^{-1}\Lambda\cdot\overline{\delta V}^T\}.
\end{aligned}
$$

置 $\delta V=(\delta_{jk})$，利用关系式 $\delta V_{jj}=0$，$j=1,\cdots,n$，得

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= \sum_{j=1}^{n}\frac{d\lambda_j^2}{(1+\lambda_j^2)^2}+\sum_{j\neq k}\frac{(\lambda_j-\lambda_k)}{(1+\lambda_j^2)(1+\lambda_k^2)}|\delta V_{jk}|^2\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{d\lambda_j^2}{(1+\lambda_j^2)^2}+2\sum_{j<k}\frac{(\lambda_j-\lambda_k)}{(1+\lambda_j^2)(1+\lambda_k^2)}|\delta V_{jk}|^2.
\end{aligned}
$$

由于 $\lambda_j=\tan r_j$，$1\leqslant j\leqslant n$，所以有

$$
ds^2=\sum_{j=1}^{n}dr_j^2+2\sum_{j<k}\sin^2(r_j-r_k)|\delta V_{jk}|,
$$

即得(2.6)式．从(2.6)式出发立即可得(2.7)和(2.8)式．引理1证毕。

引理2 设 $\omega_0=1$ 及

$$
\omega_n=\prod_{1\leqslant j<k\leqslant n}\sin(r_j-r_k).
$$

记 $\Delta_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial r_j^2}$，其中 r_1，$\cdots$，r_n 为实变数，则有下面恒等式

$$
\Delta_n\omega_n=c_n\omega_n=-\frac{1}{3}n(n^2-1)\omega_n \tag{2.9}
$$

即 ω_n 是 Δ_n 的特征函数，对应的特征值为 $-\frac{1}{3}n(n^2-1)$。

证明：引理 2 对于 $n=1$，2 显然成立. 现在假设 (2.9) 式对于 $n-1$ 成立，即

$$\Delta_{n-1}\omega_{n-1}=c_{n-1}\omega_{n-1}. \tag{2.10}$$

分解ω_n 为 $\omega_n=\omega_{n-1}\cdot\varphi_{n-1}$ 及 $\Delta_n=\Delta_{n-1}+\frac{\partial^2}{\partial r_n^2}$,

其中 $\varphi_{n-1}=\sin(r_1-r_n)\sin(r^2-r_n)\cdots\sin(r_{n-1}-r_n)$.

于是我们有

$$\Delta_n\omega_n=(\Delta_{n-1}+\frac{\partial^2}{\partial r_n^2})(\omega_{n-1}\cdot\varphi_{n-1})$$

$$=\Delta_{n-1}(\omega_{n-1}\cdot\varphi_{n-1})+\frac{\partial^2}{\partial r_n^2}(\omega_{n-1}\cdot\varphi_{n-1})$$

$$=\varphi_{n-1}\cdot\Delta_{n-1}\omega_{n-1}+\omega_{n-1}\cdot\Delta_{n-1}\varphi_{n-1}$$

$$+2\sum_{a=1}^{n-1}\frac{\partial\omega_{n-1}}{\partial r_a}\cdot\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial r_a}+\omega_{n-1}\cdot\frac{\partial^2\varphi_{n-1}}{\partial r_n^2}$$

$$=c_{n-1}\cdot\omega_{n-1}\cdot\varphi_{n-1}+\omega_{n-1}\cdot\Delta_{n-1}\varphi_{n-1}$$

$$+2\sum_{a=1}^{n-1}\frac{\partial\omega_{n-1}}{\partial r_a}\cdot\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial r_a}+\omega_{n-1}\cdot\frac{\partial^2\varphi_{n-1}}{\partial r_n^2}$$

$$=[c_{n-1}-(n-1)]\omega_n$$

$$+2\sum_{a=1}^{n-1}\frac{\partial\omega_{n-1}}{\partial r_a}\cdot\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial r_a}+\omega_{n-1}\cdot\frac{\partial^2\varphi_{n-1}}{\partial r_n^2}$$

$$=[c_{n-1}-(n-1)]\omega_n$$

$$+\omega_n\left[2\sum_{a=1}^{n-1}\frac{\partial\ln\omega_{n-1}}{\partial r_a}\cdot\frac{\partial\ln\varphi_{n-1}}{\partial r_a}+\frac{1}{\varphi_{n-1}}\cdot\frac{\partial^2\varphi_{n-1}}{\partial r_n^2}\right]$$

$$= (c_{n-1}+1-n)\,\omega_n+\omega_n\Bigg[\ 2\sum_{a=1}^{n-1}\frac{\partial\ln\omega_{n-1}}{\partial r_a}\cdot\frac{\partial\ln\varphi_{n-1}}{\partial r_a}$$

$$+\frac{\partial\ln\varphi_{n-1}}{\partial r_n^2}+\left(\frac{\partial\ln\varphi_{n-1}}{\partial r_n}\right)^2\Bigg]. \tag{2.11}$$

由于 $\ln\varphi_{n-1}=\sum\limits_{a=1}^{n-1}\ln\sin(r_a-r_n)$，所以有

$$\frac{\partial\ln\varphi_{n-1}}{\partial r_n}=\sum_{a=1}^{n-1}\frac{-\cos(r_a-r_n)}{\sin(r_a-r_n)}$$

及

$$\frac{\partial^2\ln\varphi_{n-1}}{\partial r_n^2}=-\sum_{a=1}^{n-1}\frac{1}{\sin^2(r_a-r_n)}, \tag{2.12}$$

并且

$$\left(\frac{\partial\ln\varphi_{n-1}}{\partial r_n}\right)^2=\sum_{\lambda,\mu=1}^{n-1}\frac{\cos(r_\lambda-r_n)}{\sin(r_\lambda-r_n)}\cdot\frac{\cos(r_\mu-r_n)}{\sin(r_\mu-r_n)}$$

$$=\sum_{a=1}^{n-1}\frac{\cos^2(r_a-r_n)}{\sin^2(r_a-r_n)}+2\sum_{\lambda<\mu}\frac{\cos(r_\lambda-r_n)\cos(r_\mu-r_n)}{\sin(r_\lambda-r_n)\sin(r_\mu-r_n)}. \tag{2.13}$$

又因为

$$\ln\omega_{n-1}=\sum_{1\leqslant\lambda<\mu\leqslant n}\ln\sin(r_\lambda-r_\mu),$$

故有
$$\frac{\partial\ln\omega_{n-1}}{\partial r_a}=\sum_{1\leqslant\lambda<\mu\leqslant n-1}\frac{\cos(r_\lambda-r_\mu)}{\sin(r_\lambda-r_\mu)}(\delta_{a\lambda}-\delta_{a\mu}). \tag{2.14}$$

根据(2.12)式及(2.14)式得

$$2\sum_{\alpha=1}^{n-1}\frac{\partial\ln\omega_{n-1}}{\partial r_\alpha}\cdot\frac{\partial\ln\varphi_{n-1}}{\partial r_\alpha}$$

$$=2\sum_{\alpha=1}^{n-1}\left\{\sum_{\lambda<\mu}\frac{\cos(r_\lambda-r_\mu)}{\sin(r_\lambda-r_\mu)}(\delta_{\alpha\lambda}-\delta_{\alpha\mu})\frac{\cos(r_\alpha-r_n)}{\sin(r_\alpha-r_n)}\right\}$$

$$=2\sum_{\lambda<\mu}\frac{\cos(r_\lambda-r_\mu)}{\sin(r_\lambda-r_\mu)}\cdot\left[\frac{\cos(r_\lambda-r_n)}{\sin(r_\lambda-r_n)}-\frac{\cos(r_\mu-r_n)}{\sin(r_\mu-r_n)}\right]$$

$$=2\sum_{1\leqslant\lambda<\mu\leqslant n-1}\frac{\cos(r_\lambda-r_\mu)}{\sin(r_\lambda-r_\mu)}$$

$$\cdot\left[\frac{\cos(r_\lambda-r_n)\sin(r_\mu-r_n)-\cos(r_\mu-r_n)\sin(r_\lambda-r_n)}{\sin(r_\lambda-r_n)\sin(r_\mu-r_n)}\right]$$

$$=2\sum_{\lambda<\mu}\frac{\cos(r_\lambda-r_\mu)}{\sin(r_\lambda-r_\mu)}\cdot\frac{\sin(r_\mu-r_n-r_\lambda+r_n)}{\sin(r_\lambda-r_n)\sin(r_\mu-r_n)}$$

$$=-2\sum_{\lambda<\mu}\frac{\cos(r_\lambda-r_\mu)}{\sin(r_\lambda-r_n)\sin(r_\mu-r_n)}$$

$$=-2\sum_{\lambda<\mu}\frac{\cos(r_\lambda-r_n)\cos(r_\mu-r_n)+\sin(r_\lambda-r_n)\sin(r_\mu-r_n)}{\sin(r_\lambda-r_n)\sin(r_\mu-r_n)}$$

$$=-2\sum_{\lambda<\mu}\frac{\cos(r_\lambda-r_n)\cos(r_\mu-r_n)}{\sin(r_\lambda-r_n)\sin(r_\mu-r_n)}-2\sum_{\lambda<\mu}1$$

$$=-2\sum_{1\leqslant\lambda<\mu\leqslant n-1}\frac{\cos(r_\lambda-r_n)\cos(r_\mu-r_n)}{\sin(r_\lambda-r_n)\sin(r_\mu-r_n)}$$

$$-(n-1)(n-2). \tag{2.15}$$

根据(2.12)、(2.13)、(2.15)式，我们有

$$2\sum_{\alpha=1}^{n-1}\frac{\partial\ln\omega_{n-1}}{\partial r_\alpha}\cdot\frac{\partial\ln\varphi_{n-1}}{\partial r_\alpha}+\frac{\partial^2\ln\varphi_{n-1}}{\partial r_n^2}$$

$$+\left(\frac{\partial \ln \varphi_{n-1}}{\partial r_n}\right)^2$$

$$= -2\sum_{\lambda<\mu}\frac{\cos(r_\lambda - r_n)\cos(r_\mu - r_n)}{\sin(r_\lambda - r_n)\sin(r_\mu - r_n)}$$

$$-(n-1)(n-2) - \sum_{a=1}^{n-1}\frac{1}{\sin^2(r_a - r_n)}$$

$$+\sum_{a=1}^{n-1}\frac{\cos^2(r_a - r_n)}{\sin^2(r_a - r_n)} + 2\sum_{\lambda<\mu}\frac{\cos(r_\lambda - r_n)\cos(r_\mu - r_n)}{\sin(r_\lambda - r_n)\sin(r_\mu - r_n)}$$

$$= -(n-1)(n-2) - (n-1) = -(n-1)^2.$$

因此即得

$$\Delta_n\omega_n = [c_{n-1} + 1 - n - (n-1)^2]\omega_n = c_n\omega_n,$$

其中 $c_n = -\dfrac{1}{3}n(n^2-1)$，引理2证毕.

对于酉群上的函数 f，若 f 在内自同构群 $\mathrm{int}(U(n))$ 下不变，即对于任何 $u\in U(n)$，有

$$f(uvu^{-1}) = f(uv\bar{u}^T) = f(v),\quad v\in U(n),$$

则 f 必为仅依赖于 $r_1,\ \cdots,\ r_n$ 的函数.

引理3 设 $f\in C^2(U(n))$，且 f 在 $\mathrm{int}(U(n))$ 下不变，则有

$$\Delta f(r_1,\ \cdots, r_n) = \frac{1}{\omega_n}\Delta_n(\omega_n\cdot f) - c_n f. \tag{2.16}$$

证明： 由于 f 在 $\mathrm{int}(U(n))$ 下不变，所以 f 仅与 $r_1,\cdots,r_n$ 有关. 再由(2.8)式，我们有

$$\Delta f(r_1,\ \cdots,\ r_n) = \frac{1}{\omega_n^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial r_j}\left(\omega_n^2\frac{\partial f}{\partial r_j}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\omega_n^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial r_j}\left[\omega_n\cdot\frac{\partial(\omega_n f)}{\partial r_j}\right] \\
&\quad -\frac{1}{\omega_n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial r_j}\left(\omega_n f\cdot\frac{\partial\omega_n}{\partial r_j}\right) \\
&= \frac{1}{\omega_n^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial r_j^2}(\omega_n f)+\frac{1}{\omega_n^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\omega_n}{\partial r_j}\cdot\frac{\partial(\omega_n f)}{\partial r_j} \\
&\quad -\frac{1}{\omega_n^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(\omega_n f)}{\partial r_j}\cdot\frac{\partial\omega_n}{\partial r_j}-\frac{1}{\omega_n^2}\sum_{j=1}^{n}\omega_n f\cdot\frac{\partial^2\omega_n}{\partial r_j^2} \\
&= \frac{1}{\omega_n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2(\omega_n f)}{\partial r_j}-f\cdot\frac{1}{\omega_n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\omega_n}{\partial r_j{}^2}.
\end{aligned}
$$

由引理 2 立即得

$$
\Delta f=\frac{1}{\omega_n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2(\omega_n f)}{\partial r_j^2}-c_n f.
$$

引理 3 证毕.

首先我们考虑 1 维酉群

$$
U(1)=\{u\in GL(1,\ C)\mid u\bar{u}^T=1\}=\{e^{i\theta}\mid\theta\in[0,2\pi)\}.
$$

$U(1)$上的不变微分度量为

$$
ds^2=d\theta^2,
$$

对应的 Laplace-Beltrami 算子为

$$
\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},
$$

特征方程是

$$
\Delta u=\lambda u.
$$

容易知道 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ 的谱为$\{0,\ 1^2,\ 2^2,\ \cdots,\ n^2,\ \cdots\}$. 特征函数为$\{\cos n\theta,\ \sin n\theta,\ n\geqslant 0\}$. 周知

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos n\theta, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin n\theta\right\}_{n=0,\ 1,\ \cdots}$$

构成 $L^2(U(1))$的一个完备规范正交基。

对于一般的紧致 Riemann 流形， Laplace-Beltrami 算子的谱与其热核有十分密切的关系．下面的 Sturm-Liouville 定理正是反应它们之间联系的重要定理．

Sturm-Liouville 定理　设 M 是一个紧 Riemann 流形，则 $L^2(M)$有一完备规范的正交基

$$\{\varphi_0, \ \varphi_1, \ \cdots\}.$$

其中 $\varphi_j(j=0,\ 1,\cdots)$为 M 上 Laplace-Beltrami 算子 Δ 的特征函数，φ_j 对应的特征值为 λ_j，并且

$$0=\lambda_0<\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\cdots\uparrow+\infty.$$

每个特征值 $\lambda_j(j=0,\ 1,\ \cdots)$具有有限重数， 每个特征函数 φ_j 和 M 的热核 H 具有同样的光滑程度， 最后热核 H 有如下展开式

$$H(x,\ y,\ t)=\sum_{j=0}^{\infty}e^{-\lambda_j t}\varphi_j(x)\varphi_j(y)$$

在 $t>0$ 时绝对一致收敛．

该定理的证明参见[15]或[16]．

利用 Sturm-Liouville 定理， 我们可以很容易地写出一维酉群(即 S^1)的热核 h．

$$h(e^{ir},\ e^{is},\ t)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-n^2t}\cos n(r-s), \qquad (2.17)$$

其中 $r,\ s\in[0,\ 2\pi)$．

为了方便起见，我们用 $h(r,\ s,\ t)$记 $h(e^{ir},\ e^{is},\ t)$．从(2.17)式可以看出

$$h(r,\ s,\ t)=h(r-s,\ 0,\ t)=h(0,\ s-r,\ t).$$

引理 4 一维酉群 $U(1)=S^1$ 的热核可写为

$$h(r,\ s,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{1}{4t}(r-s+2k\pi)^2\right].$$

证明： 置

$$\begin{aligned}F(b)&=\int_0^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)\cos bx\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)\cos bx\,dx.\end{aligned}$$

则 $F(b)$ 满足下面方程

$$\begin{cases}F'(b)=-\dfrac{1}{2}a^2b^2F(b),\\[2mm] F(0)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}a.\end{cases}$$

因此有

$$\int_0^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)\cos bx\,dx=\frac{a\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(-\frac{a^2b^2}{4}\right)\qquad(2.18)$$

在恒等式(2.18)中，取 $a=2\sqrt{t}$，$t>0$，$b=n$，则有

$$\begin{aligned}e^{-n^2t}&=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\cos x\,dx\\&=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\cos nx\,dx\\&=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\exp\left[-\frac{(x+2k\pi)^2}{4t}\right]\cos nx\,dx\\&=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{(x+2k\pi)^2}{4t}\right]\cos nx\right)dx\end{aligned}$$

我们把 $h(r, s, t)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2t}\cos n(r-s)$ 视为热核 $h(r,s,t)$ 的 Fourier 展开，那么 e^{-n^2t} 就可以视为 $h(r, s, t)$ 的 Fourier 展开式的系数，故有

$$h(r, s, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{(r-s+2k\pi)^2}{4t}\right].$$

引理 4 得证.

由于 $U(1)$ 的热核 $h(r, s, t)$ 具有性质 $h(r, s,t)=h(r-s,0, t)$，即它的热核仅与点 e^{ir} 和 e^{is} 间的测地距离有关，因此今后我们可以用 $h(r, t)$ 代替 $h(r, 0, t)$.

由于酉群 $U(n)$ 的度量(2.1)是不变度量(双不变的)，自然它对应的 Laplace-Beltrami 算子 Δ 也是不变的. 因此我们知道酉群 $U(n)$ 的热核 $H(u, v, t)$ 必然为左、右不变的，当然也是内自同构下不变的，即有

$$\begin{aligned}H(u,v,t)&=H(L_w(u),L_w(v),t)\\&=H(R_w(u),R_w(v),t),\quad u,v,w\in U(n)\end{aligned}$$

特别地有

$$H(u,v,t)=H(u\bar{v}^T,I,t)=H(wu\bar{v}^T\bar{w}^T,I,t).$$

所以 $H(u, v, t)$ 必仅与 $r_1(u\bar{v}^T), \cdots, r_n(u\bar{v}^T)$ 有关.

对于 $U(1)$ 的热核 $h(r, 0, t)=h(r, t)$，我们定义

$$h^{(l)}(r, t)=\left(-\frac{\partial}{\partial r}\right)^l h(r, t),\qquad l=1, 2, \cdots, n.$$

我们将运用这些函数去构造酉群 $U(n)$ 的热核.

容易验证 $h^{(l)}(r, t)$ 满足 $U(1)$ 上的热方程，即

$$\frac{\partial h^{(l)}(r, t)}{\partial t}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}h^{(l)}(r, t).$$

置 $$H_1(r_1,\cdots,r_n,t)=\frac{1}{a_n}e^{-c_n t}\sum_{j_1\cdots j_n=1}^{n}\delta^{1\cdots n}_{j_1\cdots j_n}h^{(j_1-1)}(r_1,t)\cdots h^{(j_n-1)}(r_n,t) \tag{2.19}$$

其中 a_n 为任意常数。

引理 5 由(2.19)所定义的 $H_1(r_1,\cdots,r_n,t)$满足下面微分方程

$$\frac{\partial H_1}{\partial t}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 H_1}{\partial r_j^2}+\frac{1}{3}n(n^2-1)H_1.$$

证明： 直接验证即可。

再令

$$H(r_1,\cdots,r_n,t)=\frac{1}{\omega_n}H_1, \tag{2.20}$$

则 $H(r_1,\cdots,r_n,t)$适合下面热方程

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{1}{\omega_n^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial r_j}\left(\omega_n^2\frac{\partial H}{\partial r_j}\right).$$

事实上，由引理 3 得

$$\frac{1}{\omega_n^2}\sum_j\frac{\partial}{\partial r_j}\left(\omega_n^2\frac{\partial H}{\partial r_j}\right)=\frac{1}{\omega_n}\Delta_n(\omega_n H)-c_n H$$

$$=\frac{1}{\omega_n}\Delta_n H_1-c_n\cdot\frac{1}{\omega_n}H_1=\frac{1}{\omega_n}[\Delta_n H_1-c_n H_1]$$

$$=\frac{1}{\omega_n}\frac{\partial}{\partial t}H_1=\frac{\partial}{\partial t}H.$$

注：上面最后等式用到引理 5。

上面讨论表明：$H(r_1,\cdots,r_n,t)$适合酉群上的热方程

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\Delta H.$$

引理6 对于$h^{(l)}(r, t)$，有

$$\lim_{t\to 0+}\int_0^{2\pi} h^{(l)}(r, t)\sin^m r\cos^{n-m+1} r dr = \begin{cases} 0, & l<m \\ m!, & l=m \end{cases}$$

证明： 根据引理4，有

$$\lim_{t\to 0+}\int_0^{2\pi} h^{(l)}(r, t)\sin^m r\cos^{n-m+1} r dr$$

$$= \lim_{t\to 0+}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{\partial}{\partial r}\right)^l \exp\left(-\frac{(r+2k\pi)^2}{4t}\right)\right]$$

$$\cdot \sin^m r\cos^{n-m+1} r dr$$

$$= \lim_{t\to 0+}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left[\left(-\frac{\partial}{\partial r}\right)^l \exp\left(-\frac{(r+2k\pi)^2}{4t}\right)\right]$$

$$\cdot \sin^m r\cos^{n-m+1} r dr$$

$$= \lim_{t\to 0+}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left[\left(-\frac{\partial}{\partial r}\right)^l \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right)\right]$$

$$\cdot \sin^m r\cos^{n-m+1} r dr$$

$$= \lim_{t\to 0+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left(-\frac{\partial}{\partial r}\right)^l \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right)\sin^m r\cos^{n-m+1} r dr$$

$$= \lim_{t\to 0+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right)\frac{\partial^l}{\partial r^l}(\sin^m r\cos^{n-m+1} r)dr$$

$$\xlongequal{r=2\sqrt{t}s} \lim_{t\to 0+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-s^2}[m(m-1)\cdots(m-l+1)$$

$$\cdot \sin^{m-l}(2\sqrt{t}s)\cos^{n-m+1}(2\sqrt{t}s)+\cdots]ds$$

$$= \begin{cases} 0, & l<m \\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-s^2}m!\,ds = m!, & l=m. \end{cases}$$

引理6证毕.

引理7 在 $H(r_1, \cdots, r_n, t)=\frac{1}{w_n}H_1(r_1, \cdots, r_n, t)$中取常数 $a_n=2^{-2n}(2\pi)^{n(n-1)/2}$，则 $H(r_1, \cdots, r_n, t)$是酉群上热方程

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\Delta H=\frac{1}{w_n^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial r_j}\left(w_n^2\cdot\frac{\partial H}{\partial r_j}\right) \tag{2.21}$$

的解，并且

$$\lim_{t\to 0}\int_{U(n)}H(r_1, \cdots, r_n, t)\dot{U}=1. \tag{2.22}$$

证明： 记 $U(n)/[U(1)]^n$的体积为 c_0，即

$$c_0=\int_{U(n)/[U(1)]^n}[\dot{U}]=\frac{2^{-2n}(2\pi)^{n(n-1)/2}}{1!2!\cdots(n-1)!}.$$

前面我们实际上已证明了(2.21)，余下只需证明(2.22)式即可．事实上

$$\lim_{t\to 0+}\int_{U(n)}H(r_1, \cdots, r_n, t)\dot{U}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}H_1(r_1,\cdots,r_n,t)\omega_n dr_1\wedge\cdots\wedge dr_n$$

$$\cdot\int_{U(n)/[U(1)]^n}[\dot{U}]$$

$$=c_0\lim_{t\to 0+}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}H_1(r_1, \cdots, r_n, t)\prod_{j<k}(\operatorname{tg}r_j-\operatorname{tg}r_k)$$

$$\cdot[\cos r_1\cdots\cos r_n]^{n-1}dr_1\wedge\cdots\wedge dr_n$$

$$=\frac{c_0}{a_n}\lim_{t\to 0+}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}e^{-c_n t}\sum_{j_1\cdots j_n=1}^{n}\delta_{j_1\cdots j_n}^{1\cdots n}h^{j_1-1}(r_1, t)\cdots$$

$$h^{j_n-1}(r_n, t)$$

$$\cdot\sum_{k_1\cdots k_n=1}^{n}\delta_{k_1\cdots k_n}^{1\cdots n}r_1\cdots\operatorname{tg}^{k_1-1}r_1\operatorname{tg}^{k_n-1}r_n(\cos r_1\cos r_2\cdots$$

$$\cdot\cos r_n)^{n-1}dr_1\wedge\cdots\wedge dr_n$$

$$=\frac{c_0}{a_n}\lim_{t\to 0+}\sum_{\substack{j_1,\cdots,j_n=1\\k_1,\cdots,k_n=1}}^{n}\delta^{1\cdots n}_{j_1\cdots j_n}\delta^{1\cdots n}_{k_1\cdots k_n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}h^{(j_1-1)}(r_1,\ t)\cdots$$

$$\cdot h^{(j_n-1)}(r_n,\ t)\mathrm{tg}^{k_1-1}r_1\cdots\mathrm{tg}^{k_n-1}r_n[\cos r_1\cdots\cos r_n]^{n-1}$$

$$\cdot dr_1\wedge\cdots\wedge dr_n$$

$$=\frac{c_0}{a_n}\lim_{t\to 0+}\sum_{\substack{j_1,\cdots,j_n=1\\k_1,\cdots,k_n=1}}^{n}\delta^{1\cdots n}_{j_1\cdots j_n}\ \delta^{1\cdots n}_{k_1\cdots k_n}\int_0^{2\pi}h^{(j_1-1)}(r_1,\ t)$$

$$\cdot\sin^{k_1-1}r_1\cos^{n-k_1}r_1dr_1\cdots\int_0^{2\pi}h^{(j_n-1)}(r_n,\ t)\sin^{k_n-1}r_n$$

$$\cdot\cos^{n-k_n}r_ndr_n.$$

根据引理 6 得

$$\lim_{t\to 0+}\int_{U(n)}H(r_1,\ \cdots,\ r_n,\ t)\dot{U}$$

$$=\frac{c_0}{a_n}\sum_{\substack{j_1,\cdots,j_n=1\\K_1,\cdots,K_n=1}}^{n}(\delta^{1\cdots n}_{j_1\cdots j_n})^2 j_1!\ \cdots j_n!$$

$$=\frac{c_0}{a_n}n!\ (n-1)!\ \cdots 1!\ =1.$$

引理 7 证毕.

下面我们就可以证明本节的最重要的定理了.

定理1 酉群 $U(n)$ 的热核为

$$H(u,v,t)=H(u\bar{v}^T,I,t)$$

$$=\frac{1}{a_n}\cdot\frac{1}{w_n}e^{-c_nt}\det(h^{(k-1)}(r_j(u\bar{v}^T),t))1\leqslant j,\ k\leqslant n,$$

其中 $a_n=2^{-2n}(2\pi)^{n(n-1)/2}$. 即 $H(u,v,t)$适合方程

$$\frac{\partial H(u,v,t)}{\partial t}=\Delta H(u,v,t),\quad u,v\in U(n).$$

并且对于任何 $U(n)$ 上的连续函数 f，有

$$\lim_{t\to 0+}\int_{U(n)} H(u,v,t)f(u)\dot{U}=f(v). \qquad (2.23)$$

证明：定理 1 只余下验证(2.23)式. 不失一般性，我们只对 $v=I$ 验证即可. 由

$$\begin{aligned}&\int_{U(n)} H(u,I,t)f(u)\dot{U}\\&=f(I)\int_{U(n)} H(u,I,t)\dot{U}\\&\quad+\int_{U(n)} H(u,I,t)[f(u)-f(I)]\dot{U}.\end{aligned} \qquad (2.24)$$

由于(2.22)式知道

$$\lim_{t\to 0+}f(I)\int_{U(n)} H(u,I,t)\dot{U}=f(I).$$

余下只要验证(2.24)式右边第二项当 $t\to 0+$ 时趋于 0 即可.

事实上，由于 f 连续，所以对于任意 $\varepsilon>0$，我们可以选取 n 个正数 δ_1，…，δ_n，使得当变量 u 在测地长方形

$$r_1(u)\leqslant\delta_1,\cdots,\ r_n(u)\leqslant\delta$$

中时，有

$$|f(u)-f(I)|<\varepsilon/2^n.$$

由等式

$$\begin{aligned}&\int_{U(n)} H(u,I,t)[f(u)-f(I)]\dot{U}\\&=\int_{r_n\leqslant\delta_1}\cdots\int_{r_n\leqslant\delta_n}[f(u)-f(I)]H(u,I,t)\dot{U}\\&\quad+\int\cdots\int_{\text{至少有一个}\,r_j>\delta_j} H(u,I,t)[f(u)-f(I)]\dot{U},\end{aligned} \qquad (2.25)$$

从 f 的连续性及热核性质，我们有

$$\left| \int_{r_1(u)\leq\delta_1} \cdots \int_{r_n(u)\leq\delta_n} H(u,I,t)[f(u)-f(I)]\dot{U} \right| < \varepsilon/2^n \tag{2.26}$$

再利用陆启铿教授[7]、[8]中的方法可得：对于充分小的 $t>0$，有

$$\left| \int\cdots\int_{\text{至少有一个}r_j(u)>\delta_j} H(u,I,t)[f(u)-f(I)]\dot{U} \right| < \varepsilon/2^n.$$

因此得：当 t 充分小时有

$$\left| \int_{U(n)} H(u,I,t)\,[f(u)-f(I)]\dot{U} \right| < \varepsilon,$$

即
$$\lim_{t\to 0+}\int_{U(n)} H(u,I,t)f(u)\dot{U} = f(I).$$

定理 1 证毕.

定理 1 显式给出了酉群的热核，利用这个定理及热核的性质，我们立即可以给出特殊酉群的热核.

定理2 特殊酉群 $SU(n)$ 的热核为

$$H_{SU(n)}(u_1,u_2,t) = \frac{H_{U(n)}(e^{i\theta_1}u_1, e^{i\theta_2}u_2, t)}{H_{U(1)}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, t)}.$$

证明：酉群 $U(n)$ 不是不可约的 Lie 群，根据分解 $U(n)=U(1)\times SU(n)$ 及热核的积性质有

$$\begin{aligned} &H_{U(n)}(e^{i\theta_1}u_1,\ e^{i\theta_2}u_2,\ t)\\ &= H_{U(1)}(e^{i\theta_1},\ e^{i\theta_2},\ t)H_{SU(n)}(u_1,u_2,t), \end{aligned}$$

其中 $u_1,u_2\in SU(n)$.

即
$$H_{SU(n)}(u_1,u_2,t) = \frac{H_{U(n)}(e^{i\theta_1}u_1, e^{i\theta_2}u_2, t)}{H_{U(1)}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, t)}.$$

定理 2 证毕。

§4.3 酉群的谱

在本章的第二节中，我们利用 Laplace-Beltrami 算子Δ的所有特征值及所有特征函数构造出了$U(1)$的热核，进而我们又用$U(1)$的热核显式构造出酉群的热核．反过来，作为酉群的热核的显式表达式，在本节中我们要定出酉群$U(n)$的谱．

由于

$$H(u,I,t)$$

$$=\frac{1}{a_n}\cdot\frac{1}{\omega_n}e^{-C_n t}\sum_{j_1,\cdots,j_n=1}^{n}\delta_{j_1\cdots j_n}^{1\cdots n}$$

$$\cdot h^{j_1-1}(r_1(u),t)\cdots h^{j_n-1}(r_n(u),t), \qquad (3.1)$$

把 $$h^{j_i-1}(r_i,t)=(-1)^{j_i-1}\sum_{m_i=0}e^{-m_i^2t}m_i^{j_i-1}$$

$$\cdot\cos\left(m_ir_i+\frac{j_i-1}{2}\pi\right)$$

代入(3.1)式得

$$H(u,I,t)=H(r_1(u),\cdots,r_n(u),I,t)$$

$$=\frac{1}{a_n\omega_n}e^{-c_n t}\sum_{j_1,\cdots,j_n=1}^{n}\delta_{j_1\cdots j_n}^{1\cdots n}$$

$$\cdot\sum_{m_1,\cdots,m_n=}\exp\left[-(m_1^2+\cdots+m_n^2)t\right]$$

$$\cdot\cos\left(m_1r_1+\frac{j_1-1}{2}\pi\right)\cdots\cos\left(m_nr_n+\frac{j_n-1}{2}\pi\right)$$

$$\cdot m_1^{j_1-1}\cdots m_n^{j_n-1}$$

$$= (-1)^{n(n-1)/2} \frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(c_n+k)t} \sum_{m_1^2+\cdots m_n^2=k} \frac{1}{\omega_n}$$

$$\cdot \sum_{j_1,\cdots,j_n=1}^{n} \delta_{j_1\cdots j_n}^{1\cdots n} m_1^{j_1-1}\cdots m_n^{j_n-1}$$

$$\cdot \cos\left(m_1 r_1 + \frac{j_1-1}{2}\pi\right)\cdots\cos\left(r_n m_n + \frac{j_n-1}{2}\pi\right).$$

置

$$\varphi_{m_1,\cdots,m_n}(r_1,\cdots,r_n) = \sum_{j_1,\cdots,j_n=1}^{n} \delta_{j_1\cdots j_n}^{1\cdots n} m_1^{j_1-1}\cdots m_n^{j_n-1}$$

$$\cdot \cos\left(m_1 r_1 + \frac{j_1-1}{2}\pi\right)\cdots\cos\left(m_n r_n + \frac{j_n-1}{2}\pi\right).$$

容易验证函数$\varphi_{m_1,\cdots,m_n}(r_1,\cdots,r_n)$适合方程

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial r_j^2}\varphi_{m_1,\cdots,m_n}(r_1,\cdots,r_n) - c_n\varphi_{m_1,\cdots,m_n}$$

$$= -(c_n + m_1^2 + \cdots + m_n^2)\varphi_{m_1,\cdots,m_n} \qquad (3.3)$$

又令

$$\psi_{m_1,\cdots,m_n}(r_1,\cdots,r_n) = \frac{1}{\omega_n(r_1\cdots,r_n)}$$

$$\cdot \varphi_{m_1,\cdots,m_n}(r_1,\cdots,r_n),$$

则$\psi_{m_1,\cdots,m_n}(r_1,\cdots,r_n)$为$\Delta$的以$c_n + m_1^2 + \cdots + m_n^2$为特征值的特征函数.

事实上，由引理3得

$$\Delta\psi = \frac{1}{\omega_n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial r_j^2}\varphi_{m_1,\cdots,m_n} - c_n\frac{1}{\omega_n}\varphi_{m_1,\cdots,m_n}$$

$$= \frac{-1}{\omega_n}(c_n + m_1^2 + \cdots + m_n^2)\varphi_{m_1,\cdots,m_n}$$

$$= -(c_n + m_1^2 + \cdots + m_n^2)\psi. \tag{3.4}$$

公式 (3.4) 表明 $\psi_{m_1,\cdots,m_n}$ 为酉群上的特征函数，对应的特征值为 $c_n + m_1^2 + \cdots + m_n^2$. 由于酉群的热核有(3.2)的级数展开式，根据 Sturm－Liouville 定理可知，$\{c_n + m_1^2 + \cdots + m_n^2 \mid m_1, \cdots, m_n = 0, 1, 2\cdots\}$ 构成 Δ 的所有特征值，因而有

定理1 设 Δ 为酉群 $U(n)$ 上的 Laplace-Beltrami 算子，它的所有特征值为

$$\{m_1^2 + \cdots + m_n^2 + c_n\}_{m_1,\cdots,m_n} = 0, 1, 2, \cdots$$

其中 $c_n = -\dfrac{1}{3}n(n^2-1)$.

§4.4 对称空间 GL(n,C)/U(n)的热核

本节的思路和方法与上一节基本上完全相同，因此我们只需简要地把主要步骤陈述清楚，而略去其细节. 由矩阵的极分解知

$$\begin{aligned} GL(n,C)/U(n) &\cong P(n) \\ &= \{A \in GL(n,C) \mid A\text{为正定的 Hermit 矩阵}\}, \end{aligned}$$

所以我们只要构造 $P(n)$ 的热核即可.

$P(n)$ 上的 Riemann 度量

$$ds^2 = \mathrm{tr}(H^{-1}dH \cdot \overline{H^{-1}dH}^T), \quad H \in P(n), \tag{4.1}$$

而变换 T_A: $P(n) \longrightarrow P(n)$

$$H \mapsto AH\bar{A}^T, \quad A \in GL(n,C)$$

是 Riemann 流形 $P(n)$ 的(自)等距.

对于任何 $H \in P(n)$，则存在酉矩阵 $u \in U(n)/[U(1)]^n$，使得

$$H = U \cdot \Lambda \cdot \bar{U}^T, \quad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \quad \cdots, \quad \lambda_n),$$

其中 λ_1, $\cdots$, λ_n 为H的特证值，$\lambda_i > 0$,$i = 1, \cdots, n$.

与上节完全相同，存在 $U(n)/[U(1)]^n$ 的局部坐标 θ_1, $\cdots$, $\theta_{n(n-1)}$. 因此$\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \theta_1, \cdots, \theta_{n(n-1)}\}$ 构成 $P(n)$ 的局部坐标系。

记 $\delta u = u^{-1} du = (\delta u_{jk})_{1 \leq j,k \leq n}$, $u \in U(n)$.

由恒等式

$$0 = d(\bar{u}^T u) = \bar{u}^T du + d\bar{u}^T u, \qquad u \in U(n).$$

有 $\overline{\delta u}^T = d\bar{u}^T u = -\bar{u}^T du = -\delta u$, 即 $\delta u_{jk} = -\delta \bar{u}_{kj}$.

命 $\lambda_j = \exp(r_j)$, $j = 1, \cdots, n$. 另外我们把复形式的 1-形式 δu_{jk}写为

$$\delta u_{jk} = \varphi_{jk} + i\psi_{jk}, \quad i, k = 1, \cdots, n.$$

其中 φ_{jk}, ψ_{jk} 为实的 1-形式.

引理1 度量(4.1)在局部坐标$\{r_1, \cdots, r_n, \theta_1, \cdots, \theta_{n(n-1)}\}$下有表达式

$$ds^2 = \sum_{j=1}^{n} dr_j^2 + 2\sum_{j<k} \mathrm{sh}^2 \frac{1}{2}(r_j - r_k)(\varphi_{jk}^2 + \psi_{jk}^2), \tag{4.2}$$

体积元素为

$$\dot{H} = f_0(\theta)\omega_n^2 dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_n \wedge d\theta_1 \wedge \cdots \wedge d\theta_{n(n-1)}, \tag{4.3}$$

其中 $f_0(\theta)$仅依赖于 $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_{n(n-1)})$,

$$\omega_n = \prod_{j<k}^{n} \mathrm{sh}\frac{(r_j - r_k)}{2}, \qquad (n = 1\text{时 } \omega_1 = 1)$$

Laplace-Beltrami 算子 Δ 为

$$\Delta f = \frac{1}{\omega_n^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial r_j}\left(\omega_n^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial r_j}\right)$$

$$+\frac{1}{f_0(\theta)}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n(n-1)}\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\left(f_0 g^{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial\theta_\beta}\right). \tag{4.4}$$

证明： 由于 $H=u\Lambda\bar{u}^T$，故有

$$\begin{aligned}dH&=du\cdot\Lambda\cdot\bar{u}^T+u\cdot d\Lambda\cdot\bar{u}^T+u\cdot\Lambda\cdot d\bar{u}^T\\&=u[\delta u\cdot\Lambda+d\Lambda+\Lambda\cdot\overline{\delta u^T}]\bar{u}^T\\&=u[\delta u\cdot\Lambda+d\Lambda-\Lambda\delta u]\bar{u}^T.\end{aligned}\tag{4.5}$$

将(4.5)式代入(4.1)式，我们有

$$\begin{aligned}ds^2&=\mathrm{tr}(H^{-1}dH\cdot\overline{H^{-1}dH^T})\\&=\mathrm{tr}[u\Lambda^{-1}\bar{u}^T\cdot u(\delta u\cdot\Lambda+d\Lambda+\Lambda\cdot\overline{\delta u}^T)\bar{u}^T\cdot u\Lambda^{-1}\bar{u}^T\\&\quad\cdot u(\delta\bar{u}\cdot\Lambda+d\Lambda+\Lambda\cdot\delta u)^T\bar{u}^T]\\&=\mathrm{tr}[\Lambda^{-1}(d\Lambda+\delta u\cdot\Lambda+\Lambda\cdot\delta\bar{u}^T)\Lambda^{-1}\cdot(d\Lambda+\delta\bar{u}\cdot\Lambda\\&\quad+\Lambda\delta u)^T]\\&=\mathrm{tr}(\Lambda^{-1}d\Lambda\cdot\Lambda^{-1}d\Lambda)+\mathrm{tr}[(\delta u\cdot\Lambda-\Lambda\cdot\delta u)(\delta\bar{u}\cdot\Lambda\\&\quad-\Lambda\cdot\delta\bar{u})^T].\end{aligned}$$

由 $r_j=\ln\lambda_j,\delta u_{jk}=\varphi_{jk}+i\psi_{jk}$，我们得

$$ds^2=\sum_{j=1}^{n}dr_j^2+2\sum_{j<k}\mathrm{sh}^2\frac{1}{2}(r_j-r_k)(\varphi_{jk}^2+\psi_{jk}^2).$$

这就证明了(4.2)．(4.3)式、(4.4)式经简单计算即得．

引理2 对 ω_n 我们有

$$\Delta_n\omega_n=c_n\omega_n=\frac{1}{12}n(n^2-1)\omega_n,$$

其中 $\Delta_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial r_j^2}$，$\omega_n=\prod_{j<k}\mathrm{sh}(r_j-r_k)$．

证明同上节的引理2．

由于 $P(n)$ 的热核仅依赖于 $r_1,\cdots,r_n$ 及时间参数 t，因此热核 h 满足方程

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \Delta h = \frac{1}{\omega_n^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial r_j}\left(\omega_n^2 \cdot \frac{\partial h}{\partial r_j}\right),$$

也即
$$\frac{\partial(\omega_n h)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2(\omega h)}{\partial r_j^2} - c_n(\omega h). \tag{4.6}$$

周知 $P(1) = (0, +\infty)$，则它的热核为

$$h_1(r,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-r^2/4t}.$$

我们置

$$h_1^{(k)}(r,t) = \left(-\frac{\partial}{\partial r}\right)^k h_1(r,t),\quad k = 0,1,2\cdots,$$

则它满足 $P(1)$的热方程，即

$$\frac{\partial h_1^{(k)}(r,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}h_1^{(k)}(r,t).$$

置

$$h(r_1,\cdots r_n,t) = \frac{c_1}{\omega}\mathrm{e}^{-c_n t}\sum_{j_1,\cdots,j_n=1}^{n}\delta_{j_1\cdots j_n}^{1\cdots n}h_1^{j_1-1}(r_1,t)\cdots$$
$$\cdot\, h_1^{j_n-1}(r_n,t),$$

c_1 为任何常数，则它满足方程(4.6)，若取

$$c_1^{-1} = \lim_{t\to 0}\int_{P(n)}\frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{-c_n t}\det[h^{(j_1-1)}(r_k,t)]_{1\leqslant j,k\leqslant n}\dot{H}. \tag{4.7}$$

（这个极限存在，其证明与§4.2引理6相仿，这里不赘述）

定理1 对称空间$P(n)$的热核为

$$H_{P(n)}(H_1,H_2,t) = h(r_1(H_1,H_2),\cdots,r_n(H_1,H_2),t). \tag{4.8}$$

注意：由于 H_2 为正定 Hermite 方阵，所以有

$$H_2 = P\overline{P}^T, \quad P \in GL(n, \mathbb{C}).$$

由于 $P(n)$ 的热核

$$H_{P(n)}(H_1, H_2, t) = H_{P(n)}(H_1, P\overline{P}^T, t)$$

$$= H_{P(n)}(P^{-1}H_1 \overline{P^{-1}}^T, I, t),$$

所以 $r_j(P^{-1}H_1\overline{P^{-1T}})$ 仅与 H_1 及 H_2 有关.(4.8)式中的 $r_j(H_1, H_2)$ 就是 $r_j(P^{-1}H_1\overline{P^{-1T}})$.

同样对称空间 $P(n)$ 不是不可约的. 记

$$P^1(n) = \{H \in P(n) \mid \det H = 1\},$$

则 $P^1(n)$ 不可约,并且有 $P(n) \cong P^1(n) \times P(1)$, 因而有

$$H^1_{P(n)} = \frac{H_{P(n)}(\lambda_1 H_1, \lambda_2 H_2, t)}{H_{P(1)}(\lambda_1, \lambda_2, t)}.$$

关于本节的详细内容可见[9].

第五章 复超球B^n的（0, 1）形式热核和（0, 1）-Green形式

§5.1 引　言

设 $B^n=\{Z=(z^1,\cdots,z^n)\in\mathbb{C}^n\mid Z\overline{Z}^T<1\}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的单位复超球，它上面的不变微分度量为

$$ds^2=h_{\alpha\overline{\beta}}dz^\alpha d\overline{z}^\beta. \tag{1.1}$$

这里及以后使用和号的省略，而

$$h_{\alpha\overline{\beta}}=\frac{\delta_{\alpha\beta}}{1-|Z|^2}+\frac{\overline{z}^\alpha z^\beta}{(1-|Z|^2)^2}=-\frac{\partial^2\ln(1-|Z|^2)}{\partial z^\alpha\partial\overline{z}^\beta} \tag{1.2}$$

由(1.2)式知度量(1.1)为一个 Kähler 度量，并且它与 B^n 上的 Bergman 度量相差一个常数因子. 因此它在 B^n 的全纯自同构群 $\mathrm{Aut}(B^n)$作用下不变，即对于任何 $T\in\mathrm{Aut}(B^n)$，有

$$h_{\alpha\overline{\beta}}(T(Z))dT^\alpha(Z)\overline{dT^\beta(Z)}=h_{\alpha\overline{\beta}}(Z)dz^\alpha d\overline{z}^\beta. \tag{1.3}$$

对应于度量(1.1)的 Laplace-Beltrami 算子为

$$\Delta=4h^{\alpha\overline{\beta}}\frac{\partial^2}{\partial z^\alpha\partial\overline{z}^\beta}, \tag{1.4}$$

其中

$$h^{\alpha\overline{\beta}}(Z)=(1-|Z|^2)(\delta_{\alpha\beta}-\overline{z}^\beta z^\alpha). \tag{1.5}$$

陆启铿教授在文[7]中显式写出了 B^n 的热核. 在本章中，我们利用 B^n 的热核显式构造出了 B^n的(0,1)形式热核，从而也得到 B^n 的(0，1)-Green 形式.

由于本节的研究对象均为 $\mathrm{Aut}(B^n)$不变的，因此有必要把 $\mathrm{Aut}(B^n)$刻划清楚.

引理 1 对于任何 $\psi\in\mathrm{Aut}(B^n)$，存在 $a\in B^n$ 及酉变换 u，使得 $\psi=u\cdot\varphi_a$，其中 φ 有下列表达式:

$$\varphi_a(Z)=\frac{a-P_a(Z)-s_aQ_a(Z)}{1-\langle Z,\ a\rangle}=\frac{a-P_a(Z)-s_aQ_a(Z)}{1-Z\bar{a}^T},$$

$$s_a^2=1-|a|^2,\quad P_a(Z)=\frac{Z\bar{a}^T}{|a|^2}\cdot a\,(a\neq 0),\quad P_0(Z)=0,\ Q_a=I-P_a.$$

I 为恒同变换.

事实上，由于 $\psi\in\mathrm{Aut}(B^n)$，所以存在 $a\in B^n$ 使得 $\psi(a)=0$. 根据文献[47]定理 2.2.5 即得引理.

考虑

$$\varphi_a(Z)=\frac{a-P_a(Z)-s_a(I-P_a)(Z)}{1-Z\bar{a}^T}$$

$$=\frac{1}{1-Z\bar{a}^T}\cdot\left[a-\frac{Z\bar{a}^T}{a\bar{a}^T}a-s_aZ+s_a\cdot\frac{Z\bar{a}^T}{a\bar{a}^T}a\right]$$

$$=\frac{1}{1-Z\bar{a}^T}\left[a-s_aZ+(s_a-1)\frac{Z\bar{a}^T}{a\bar{a}^T}a\right]$$

$$=\frac{-1}{1-Z\bar{a}^T}\left[s_aZ-a-\frac{1-s_a}{|a|^2}\cdot Z\bar{a}^Ta\right]$$

$$=-\frac{1}{1-Z\bar{a}^T}\left[(z-a)s_a+\frac{1-s_a}{|a|^2}\cdot Z\bar{a}^Ta-a+s_aa\right]$$

$$=-\frac{1}{1-Z\bar{a}^T}\left[(Z-a)s_a-\frac{1-s_a}{|a|^2}Z\bar{a}^Ta-\frac{1-s_a}{|a|^2}a\bar{a}^Ta\right]$$

$$=-\frac{Z-a}{1-Z\bar{a}^T}\left[s_aI+\frac{1-s_a}{|a|^2}\bar{a}^Ta\right]=\frac{Z-a}{1-Z\bar{a}^T}A(a),$$

$$(1.6)$$

其中 $A(a) = -\left[s_a I + \frac{1-s_a}{|a|^2}\bar{a}^T a\right]$为一个仅与 a 有关的方阵，并且对于 $a\in B^n$，$A(a)$可逆．实际上，

$$A^{-1}(a) = -B(a) = -\frac{1}{s_a}\left(I - \frac{1-s_a}{|a|^2}\bar{a}^T a\right) \tag{1.7}$$

这是因为

$$B^{-1}(a) = s_a\left[I - \frac{1-s_a}{|a|^2}\bar{a}^T a\right]^{-1},$$

取 $\lambda = \frac{1-s_a}{|a|^2}$，显然有 $\lambda a\bar{a}^T = 1-s<1$，并且

$$|\lambda\bar{a}^T a| = \frac{|\lambda a\bar{a}^T a|}{|a|} = |\lambda a\bar{a}^T| = 1-s<1,$$

因此得

$$\begin{aligned}B^{-1}(a) &= s_a\left[I - \frac{1-s_a}{|a|^2}\bar{a}^T a\right]^{-1} = s_a[I-\lambda\bar{a}^T a]^{-1}\\ &= s_a[I+\lambda\bar{a}^T a+\lambda^2\bar{a}a\bar{a}^T a+\cdots]\\ &= s_a[I+\lambda\bar{a}^T a+\lambda^2(\bar{a}^T a)^2+\cdots+\lambda^k(\bar{a}^T a)^k+\cdots]\\ &= s_a[I+\bar{a}^T a\cdot\lambda(1+\lambda a\bar{a}^T+\cdots)]\\ &= s_a\left[I+\frac{1-s}{s|a|^2}\bar{a}^T a\right] = -A(a).\end{aligned}$$

引理 2（Rudin，［4］）　$\{\varphi_a\}_{a\in B}$ 组成 $\mathrm{Aut}(B^n)$的一个子群，并且齐性作用在 B^n 上．还有

（1）φ_a为对合的，即 $\varphi_a\cdot\varphi_a(Z) = Z$．

（2）$\varphi_a(0) = a$，$\varphi_a(a) = 0$．

(3) $\varphi_a'(0) = -s_a^2 P_a - s_a Q_a, \varphi_a'(a) = -\frac{P_a}{s_a^2} - \frac{Q_a}{s_a}$.

(4) $$1 - \langle \varphi_a(Z), \varphi_a(W) \rangle = \frac{(1-\langle a,a\rangle)(1-\langle Z,W\rangle)}{(1-\langle Z,a\rangle)(1-\langle a,W\rangle)},$$

$Z, W \in \bar{B}^n$.

特别

$$1 - |\varphi_a(Z)|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|Z|^2)}{|1-Z\bar{a}^T|^2}.$$

(5) φ_a: $\bar{B}^n \to \bar{B}^n$ 是光滑同胚.

下面我们把线性算子 $\varphi_a'(0)$ 及 $\varphi_a'(a)$ 写成矩阵形式. 设 $e_1 = (1,0,\cdots,0)$, $\cdots$, $e_n = (0,\cdots 0,1)$为 C^n的标准基. 对于 $a \in B^n$, $a = (a_1, \cdots, a_n)$, 则有

$$a_i = \langle a, e_i \rangle = a \cdot \bar{e}_i^T.$$

根据引理 2的(3), 则有

$$\varphi_a'(a)(e_i) = -\frac{P(e_i)}{s_a^2} - \frac{Q(e_i)}{s_a}$$

$$= -\frac{1}{s_a^2}\frac{a_i}{|a|^2}\cdot a - \frac{1}{s_a}\cdot e_i + \frac{1}{s_a}\cdot\frac{a_i}{|a|^2}\cdot a$$

$$= -\frac{1}{s_a}e_i + \frac{s_a - 1}{s_a^2|a|^2}\cdot a_i \cdot a = -\frac{1}{s_a}e_i + \frac{s_a-1}{s_a^2|a|^2}\sum_{j=1}^n a_i a_j \cdot e_j.$$

因此有

$$(J_C\varphi_a)(a) = -\frac{1}{s_a}\cdot I + \frac{s_a - 1}{s^2|a|^2}\bar{a}^T a. \tag{1.8}$$

同法可得

$$(J_C\varphi_a)(0) = -s_a I - \frac{1-s_a}{|a|^2}\bar{a}^T a. \tag{1.9}$$

显然$(J_C\varphi_a)(a)$与$(J_C\varphi_a)(0)$互为逆矩阵.

利用前面的引理，我们可以说B^n的热核$h(Z,W,t)$，$(Z,W\in B^n)$仅与Z和W间的测地距离以及t有关.

事实上，由于$h(Z,W,t)$在$\mathrm{Aut}(B^n)$下不变，即对于任何$T\in\mathrm{Aut}(B^n)$，有

$$h(T(Z),T(W),t)=h(Z,W,t),\qquad Z,W\in B^n$$

特别地，取$T=\varphi_W\in\mathrm{Aut}(B)$，则有

$$h(Z,W,t)=h(\varphi_W(Z),\ \varphi_W(W),t)=h(\varphi_W(Z),0,t).$$

又因全体酉变换所成的群$U(n)$为$\mathrm{Aut}(B^n)$的子群，所以得

$$h(Z,W,t)=h(u\cdot\varphi_W(Z),0,t)\qquad u\in U(n)$$

特别地，我们取$u\in U(n)$，使得

$$u(\varphi_W(Z))=(|\varphi_W(Z)|,0\cdots,0)=|\varphi_W(Z)|e_1.$$

由线性代数知识(见[87])知道这样的酉变换u存在.

由引理2的(4)得

$$|\varphi_W(Z)|^2=1-\frac{(1-|W|^2)(1-|Z|^2)}{|1-Z\overline{W}^T|^2}\tag{1.10}$$

另一方面，Z和W间的测地距离$r(Z,W)$(关于度量(1.1)为

$$r(Z,W)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+[Q(Z,W)]^{\frac{1}{2}}}{1-[Q(Z,W)]^{\frac{1}{2}}},\tag{1.11}$$

其中 $$Q(Z,W)=\frac{(Z-W)(I-\overline{W}^TZ)^{-1}\overline{(Z-W)}^T}{1-W\overline{Z}^T}$$

由(1.11)式我们得到

$$\mathrm{th}^2r(Z,W)=\frac{(Z-W)(I-\overline{W}^TZ)^{-1}\overline{(Z-W)}^T}{1-W\overline{Z}^T}$$

$$= 1 - \frac{(1-|Z|^2)(1-|W|^2)}{|1-W\overline{Z}^T|^2}, \tag{1.12}$$

因而有 $\text{th}^2 r(Z,W) = |\varphi_W(Z)|^2$. 进而我们得到

$$h(Z,W,t) = h(|\varphi_W(Z)|e_1, 0, t). = h(\text{th}r(Z,W), t),$$

所以热核$h(Z,W,t)$仅与 $r(Z,W)$及 t 有关.

§5.2 B^n的(0, 1)形式热核

为方便计，本节我们采用的 Neumann 算子为 $-4(\bar\partial^*\bar\partial + \bar\partial\bar\partial^*)$，我们仍记为$\square$.

设 B^n 的(0, 1)形式热核为

$$H(Z, W, t) = H_{\alpha\bar\beta}(Z, W, t)dw^\alpha d\bar z^\beta + H_{\alpha\beta}(Z, W, t) \cdot dw^\alpha dz^\beta + H_{\bar\alpha\beta}(Z, W, t)d\overline{w}^\alpha dz^\beta + H_{\bar\alpha\bar\beta}(Z,W, t)d\overline{w}^\alpha d\bar z^\beta, \quad Z, W \in B^n. \tag{2.1}$$

对于 B^n 上的(0, 1)外微分形式 $\varphi(Z) = \varphi_{\bar\alpha}(Z)dz^\alpha$，有

$$\begin{aligned} &\varphi(Z) \wedge \overline{*_Z H(Z, W, t)} \\ &= \varphi(Z) \wedge \overline{*_Z H_{\alpha\bar\beta}(Z, W, t)dw^\alpha d\bar z^\beta} \\ &\quad + \varphi(Z) \wedge \overline{*_Z H_{\bar\alpha\bar\beta}(Z, W, t)d\overline{w}^\alpha d\bar z^\beta)}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

由于上式中只会出现 $H(Z, W, t)$中的两项，而含有 $H_{\alpha\beta}$ 和 $H_{\bar\alpha\beta}$ 的项对(2.2)式没有贡献，所以无妨取

$$H_{\alpha\beta}(Z, W, t) = H_{\bar\alpha\beta}(Z, W, t) = 0 .$$

另外，对于 B^n 的(0, 1)形式热核 $H(Z, W, t)$，我们要求对于任何具有紧支集的(0, 1)形式 φ 有下面恒等式成立

$$\lim_{t\to 0^+} \int_B \varphi(Z) \wedge \overline{*_Z H(Z, W, t)} = \varphi(W), Z,W \in B^n.$$

因此我们可以设 B^n 的(0, 1)形式热核为

$$H(Z,\ W;\ t)=H_{\alpha\bar{\beta}}(Z,\ W,\ t)\,dw^{\alpha}d\bar{z}^{\beta}. \tag{2.3}$$

即 $H(Z,\ W,\ t)$ 为 B^n 上热方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\square u \tag{2.4}$$

的基本解.

由于度量(1.1)在 $\mathrm{Aut}(B^n)$ 下不变，Neumann 算子$\square$也在 $\mathrm{Aut}(B^n)$ 下不变，所以我们自然要求 $H(Z,\ W,\ t)$ 在 $\mathrm{Aut}(B^n)$ 下不变，即

$$H(T(Z),\ T(W),\ t)=H(Z,\ W,\ t),\qquad T\in\mathrm{Aut}(B^n).$$

特别地，有

$$H(\varphi_W(Z),\ \varphi_W(W),\ t)=H(\varphi_W(Z),0,t)=H(Z,W,t).$$

又因为

$$\square_{\varphi_{W}(Z)}H(\varphi_W(Z),0,t)=\square_Z H(Z,W,t),$$

所以我们求解热方程(2.4)就化为求解

$$\frac{\partial H(Z,0,t)}{\partial t}=\square_Z H(Z,0,t). \tag{2.5}$$

又由于 B^n 的原点 $O=(0,\ \cdots,\ 0)$ 在 $\mathrm{Aut}(B^n)$ 作用的迷向子群为 n 次酉群，而且 $H(Z,\ 0,\ t)$在酉群（全体酉变换，也即 $U(n)$，见第四章)作用下不变，即

$$H(Z,\ 0,\ t)=H(u(Z),\ 0,\ t),\qquad u\ \text{为酉变换}.$$

由 Weyl 定理([36])知：$H(Z,\ 0,\ t)$可表示为 $z^{\alpha}d\bar{Z}^{\alpha}$，$\bar{z}^{\alpha}dw^{\alpha}$ 及 $dw^{\alpha}d\bar{z}^{\alpha}$ 所组成的双一次形式，其系数为 $r=|Z|^2=Z\bar{Z}^T$ 及 t 的函数．即有

$$H(Z,\ 0,\ t)=H_{\alpha\bar{\beta}}(Z,\ 0,\ t)\,dw^{\alpha}d\bar{z}^{\beta},$$

其中 $H_{\alpha\bar{\beta}}(Z,\ 0,\ t)=\varphi(r,\ t)\delta_{\alpha\beta}+f(r,\ t)\bar{z}^{\alpha}z^{\beta}$，$\varphi$，$f$ 均为 r 和 t 的函数，并且假定它们关于 r 两阶可微分，关于 t 一阶可微分.

引理1 对于双一次微分形式

$$H(Z,\ 0,\ t)=\{\varphi(r,\ t)\delta_{\alpha\beta}+f(r,\ t)\bar{z}^{\alpha}z^{\beta}\}dw^{\alpha}d\bar{z}^{\beta},$$

有

$$\begin{aligned}\square_Z H(Z,0,t)=4\{&(1-r)[r(1-r)\varphi''+(n-2r)\varphi'+f]\\&\cdot\delta_{\alpha\beta}+[r(1-r)^2f''+(1-r)(n+2-5r)f'\\&-(n-2-3r)f\\&-(1-r)\varphi'\bar{z}^{\alpha}z^{\beta}\}dw^{\alpha}d\bar{z}^{\beta}\end{aligned}\tag{2.6}$$

其中 $r=|Z|^2$，$\varphi'=\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}$，$\varphi''=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}$，$f'=\dfrac{\partial f}{\partial r}$，$f''=\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}$.

证明： 由于$\square=-4(\bar{\partial}^*\bar{\partial}+\bar{\partial}\bar{\partial}^*)$及§2.8 命题5得

$$\square_Z H(Z,\ 0,\ t)=[\square_Z H_{\alpha\bar{\beta}}(Z,\ o,\ t)\mathrm{d}w^{\alpha}]\mathrm{d}\bar{z}^{\beta}.$$

而

$$\square_Z H_{\alpha\bar{\beta}}=4h^{\lambda\bar{\mu}}\left[\frac{\partial^2 H_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial z^{\lambda}\partial\bar{z}^{\mu}}-\Gamma^{\gamma}_{\beta\gamma}\frac{\partial H_{\alpha\gamma}}{\partial z^{\lambda}}\right],\tag{2.7}$$

其中

$$h^{\lambda\bar{\mu}}=(1-|Z|^2)(\delta_{\lambda\mu}-\bar{z}^{\mu}z^{\lambda}),$$

$$\Gamma^{\gamma}{}_{\beta\mu}=\frac{1}{1-|Z|^2}[\bar{z}^{\beta}\delta^{\gamma}_{\mu}+\bar{z}^{\mu}\delta^{\gamma}_{\beta}].$$

令 $r=|Z|^2$，直接计算得

$$\frac{\partial H_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial\bar{z}^{\mu}}=\varphi'(r,\ t)\delta_{\alpha\beta}z^{\mu}+f\cdot\delta_{\alpha\mu}\cdot z^{\beta}+f'(r,\ t)z^{\mu}\bar{z}^{\alpha}z^{\beta}\tag{2.8}$$

及

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial z^{\lambda}\partial\bar{z}^{\mu}}=&\varphi'(r,\ t)\delta_{\alpha\beta}\cdot\delta_{\lambda\mu}+\varphi''(r,\ t)\delta_{\alpha\beta}\cdot\bar{z}^{\lambda}\cdot z^{\mu}\\&+f\cdot\delta_{\alpha\mu}\cdot\delta_{\lambda\beta}+f'(r,\ t)\delta_{\alpha\mu}\cdot\bar{z}^{\lambda}z^{\beta}\end{aligned}$$

$$+ f'\delta_{\lambda\mu}\cdot\bar{z}^{\alpha}z^{\beta} + f'\cdot\delta_{\beta\lambda}\bar{z}^{\alpha}\cdot z^{\mu}$$

$$+ f''\bar{z}^{\lambda}z^{\mu}\bar{z}^{\alpha}z^{\beta}. \tag{2.9}$$

因此有 $h^{\lambda\bar{\mu}}\dfrac{\partial H_{\bar{\alpha}\beta}}{\partial z^{\lambda}\partial\bar{z}^{\mu}}$

$$= (1-r)[n\varphi'\cdot\delta_{\alpha\beta} + \varphi''\cdot r\cdot\delta_{\alpha\beta} + f\delta_{\alpha\beta} + f'\bar{z}^{\alpha}z^{\beta}$$
$$+ nf'\bar{z}^{\alpha}z^{\beta} + f'\bar{z}^{\alpha}z^{\beta} + f''\cdot r\cdot\bar{z}^{\alpha}z^{\beta}]$$
$$- (1-r)[\varphi'\cdot r\cdot\delta_{\alpha\beta} + \varphi''\cdot r^{2}\cdot\delta_{\alpha\beta} + f\bar{z}^{\alpha}z^{\beta} + f'\cdot r\cdot\bar{z}^{\alpha}z^{\beta}$$
$$+ f'\cdot r\cdot\bar{z}^{\alpha}z^{\beta} + f'\cdot r\cdot\bar{z}^{\alpha}\cdot z^{\beta} + f''\cdot r^{2}\cdot\bar{z}^{\alpha}\cdot z^{\beta}] \tag{2.10}$$

同时由于

$$\frac{\partial H_{\alpha\bar{\gamma}}}{\partial z^{\lambda}} = \varphi'(r,\ t)\delta_{\alpha\gamma}\cdot\bar{z}^{\lambda} + f\delta_{\alpha\gamma}\cdot\bar{z}^{\alpha}$$
$$+ f'\bar{z}^{\lambda}\bar{z}^{\alpha}z^{\gamma} \tag{2.11}$$

及 $\Gamma^{\gamma}{}_{\beta\gamma}\cdot\dfrac{\partial H_{\alpha\bar{\gamma}}}{\partial z^{\lambda}}$

$$= \frac{1}{1-r}\{\varphi'\cdot\delta_{\alpha\mu}\cdot\bar{z}^{\lambda}z^{\beta} + f\cdot\delta_{\lambda v}\bar{z}^{\alpha}z^{\beta} + f'\cdot\bar{z}^{\lambda}\cdot\bar{z}^{\alpha}\cdot z^{\beta}\cdot z^{\mu}$$
$$+ \varphi'\cdot\delta_{\alpha\beta}\bar{z}^{\lambda}z^{\mu} + f\cdot\delta_{\lambda\beta}\bar{z}^{\alpha}z^{\mu} + f'\bar{z}^{\lambda}\bar{z}^{\alpha}z^{\beta}z^{\mu}\},$$

因此有

$$h^{\lambda\bar{\mu}}\cdot\Gamma^{\gamma}_{\beta\mu}\cdot\frac{\partial H_{\alpha\bar{\gamma}}}{\partial z^{\lambda}}$$
$$= \{\varphi'\cdot\bar{z}^{\alpha}z^{\beta} + f\cdot n\cdot\bar{z}^{\alpha}z^{\beta} + f'\cdot r\cdot\bar{z}^{\alpha}\cdot z^{\beta} + \varphi'\cdot r\cdot\delta_{\alpha\beta}$$
$$+ f\cdot\bar{z}^{\alpha}\cdot z^{\beta} + f'\cdot r\cdot\bar{z}^{\alpha}\cdot z^{\beta}\} - \{\varphi'\cdot r\bar{z}^{\alpha}z^{\beta}$$
$$+ f\cdot r\cdot\bar{z}^{\alpha}z^{\beta} + f'\cdot r^{2}\bar{z}^{\alpha}z^{\beta} + \varphi'\cdot r^{2}\cdot\delta_{\alpha\beta}$$
$$+ f\cdot r\cdot\bar{z}^{\alpha}z^{\beta} + f'\cdot r^{2}\cdot\bar{z}^{\alpha}\cdot z^{\beta}\}. \tag{2.12}$$

将(2.10)式减去(2.12)式，整理后即得引理1．引理1

证毕.

如果

$$H(Z, 0, t) = \{\varphi(r, t)\delta_{\alpha\beta} + f(r, t)\bar{z}^{\alpha}z^{\beta}\}dw^{\alpha}d\bar{z}^{\beta}$$

为热方程

$$\frac{\partial H(Z, 0, t)}{\partial t} = \square_Z H(Z, 0, t)$$

的解，利用引理 1 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= r(1-r)^2\varphi'' + (1-r)(n-2r)\varphi' + (1-r)f \\ &= r(1-r)^2\varphi'' + (1-r)(n+1-2r)\varphi' \\ &\quad + (1-r)(f-\varphi')\end{aligned} \tag{2.13}$$

及

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial t} &= r(1-r)^2 f'' + (1-r)(n+2-5r)f' - (n+2-3r)f \\ &\quad + (1-r)\varphi' \\ &= r(1-r)f' + (1-r)(n+1-2r)f]' \\ &\quad + (1-r)(f-\varphi').\end{aligned} \tag{2.14}$$

如果取特解 $f=\varphi'$，则(2.13)及(2.14)式化为

$$\frac{1}{4}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = r(1-r)^2\varphi'' + (1-r)(n+1-2r)\varphi'$$

及

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)' = [r(1-r)^2\varphi'' + (1-r)(n+1-2r)\varphi']'.$$

显然上面两个方程只有一个独立方程，即

$$\frac{1}{4}\frac{\partial\varphi(r, t)}{\partial t} = r(1-r)^2\varphi'' + (1-r)(n+1-2r)\varphi'. \tag{2.15}$$

将(2.15)式变形为

$$\frac{1}{4}\frac{\partial\varphi(r,\ t)}{\partial t}=\frac{(1-r)^{n+1}}{r^n}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{r^n}{(1-r)^{n+1}}\cdot r\cdot(1-r)^2\cdot\frac{\partial\varphi(r,\ t)}{\partial r}\right]$$

$$=L\varphi(r,\ t). \tag{2.16}$$

现在考虑 B^n 中欧氏距离与双曲测地距离之间的关系. 以后我们用 s 表示从原点到点 Z 的**双曲测地**距离 $s(0,Z)$，则有

$$s=s(0,\ Z)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{Z\overline{Z}^T}}{1-\sqrt{Z\overline{Z}^T}}. \tag{2.17}$$

命 $r=Z\overline{Z}^T=|Z|^2$, $\sqrt{r}=|Z|$ 为原点 $0=(0,\cdots,0)$ 和点 Z 间的欧氏距离，则(2.17)式可写为

$$2s=\ln\frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}},$$

即有 $r=\tanh^2 s$.

将 $r=\tanh^2 s$ 代入(2.16)式，

$$\frac{1}{4}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{(1-r)^{n+1}}{r^n}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{r^n}{(1-r)^{n+1}}\cdot r\cdot(1-r)^2\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]$$

$$=\frac{(1-\tanh^2 s)^{n+1}}{\tanh^{2n}s}\cdot\frac{\partial s}{\partial r}$$

$$\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\tanh^{2(n+1)}s}{(1-\tanh^2 s)^{n-1}}\cdot\frac{\partial s}{\partial r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\text{ch}s}{\text{sh}^{2n+1}s} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\text{sh}^{2n+1}s}{\text{ch}s} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right],$$

即有
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\text{ch}s}{\text{sh}^{2n-1}s} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\text{sh}^{2n+1}s}{\text{ch}s} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right] = L(\varphi). \tag{2.18}$$

引理 2 对应于 Kähler 度量(1.1)的 Laplace-Beltrami 算子 Δ，在极限球面(horosphere)坐标系下可写为

$$\Delta = \frac{1}{\text{sh}^{2n-1} \cdot \text{ch}s} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left(\text{sh}^{2n-1}s \cdot \text{ch}s \cdot \frac{\partial}{\partial s}\right)$$

$$+ \text{其它不含} \frac{\partial}{\partial s} \text{的项},$$

其中 $s = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}}$, $r = |Z|^2$.

该引理的证明可参见[7].

我们记算子 Δ 的径向部分为 L_1，即

$$L_1 = \frac{1}{\text{sh}^{2n-1}s\text{ch}s} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left(\text{sh}^{2n-1}s \cdot \text{ch}s \cdot \frac{\partial}{\partial s}\right).$$

若 $B^n \times \mathrm{R}^+$ 上的光滑函数 u 仅与时间变量 t 及 B^n 内点 Z 到原点的测地距离 $s(O, Z) = s$ 有关，并且满足热方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$，则必有

$$\frac{\partial u(s, t)}{\partial t} = L_1 u(s, t). \tag{2.19}$$

我们知道 B^n 的热核 $h(Z, W, t)$ 仅与 t 及点 Z 和 W 间的测地距离有关，因此 $h(Z, 0, t)$ 必满足热方程(2.19). 可以看出微分方程(2.19)与(2.18)很相似. 为说明它们之间的关系，我们首先定义一个一阶偏微分算子 D_t

$$Dg(s, t) = \frac{\mathrm{ch}s}{\mathrm{sh}s} \cdot \frac{\partial}{\partial s} g(s, t). \tag{2.20}$$

于是我们有下列引理.

引理 3 对于可微分函数 $\varphi(s, t)$，有

$$L \cdot (D\varphi) = DL_1\varphi.$$

证明: 把 L_1 和 L 按定义代入直接计算即可.

上面引理表明：若函数 $\varphi(s,t)$ 为热方程(2.19) 的解,则 $(D\varphi)(s, t)$ 就是热方程(2.18)的一个解. 因此就有这样的定理:

定理 1 对于定义在 $B^n \times \mathrm{R}^+$ 上的两次可微分函数 φ,并且 φ 仅依赖于 $r = |Z|^2$ 及 $t \in R^1$，若 φ 适合方程

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = L_1 \varphi,$$

则(0, 1)形式

$$H(Z, 0, t) = \left[(D\varphi)\delta_{\alpha\beta} + \frac{\mathrm{ch}^3 s}{2\mathrm{sh}s} \cdot \frac{\partial}{\partial s}(D\varphi) \bar{z}^\alpha z^\beta\right] dw^\alpha d\bar{z}^{-\beta}$$

为热方程

$$\frac{\partial H(Z, 0, t)}{\partial t} = \Box_Z H(Z, 0, t)$$

的解.

对于函数 $f_0(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4t}$，$(x, t) \in B^n \times R^+$. 我们定义一个新函数

$$f(x, t) = \int_{+\infty}^{x} d\sigma \int_{+\infty}^{\sigma} f_0(\tau, t) d\tau. \tag{2.21}$$

显然它满足 R^1 上的热方程

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}.$$

对于函数 $f_0(x, t)$，定义积分变换 T

$$\begin{aligned}(Tf_0)(r, t)&=h(r, t)\\&=c_0\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-n^2 t}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\operatorname{ch}\sigma}\left(\frac{1}{\operatorname{sh}\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)^{n-1}\right.\\&\quad\left.\cdot f_0(\sigma, t)\right]_{\operatorname{ch}^2\sigma=\operatorname{ch}^2 r+\eta^2}d\eta\end{aligned}\tag{2.22}$$

其中 $c_0=\frac{(2n)!}{2^{3n-2}(n-1)!n!\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{\pi}\right)^n$.

陆启铿教授在[7]中证明了 $h(s, t)$适合热方程

$$\frac{\partial\varphi(s, t)}{\partial t}=L_1\varphi(s, t),$$

并且是 B^n 的热核 $h(Z, 0, t)$.

对于函数 $f(x, t)$，则 Tf 同样也满足方程(2.19). 因此 $D(Tf)$满足方程(2.18).

令 $\varphi(s(0, Z), t)=[DTf(s, t)]_{s=s(0,Z)}$，则有下面定理.

定理 2 B^n 上的(0, 1)形式

$$H(Z, 0, t)=\frac{1}{4c_n}\left[\varphi(s(0,Z), t)\delta_{\alpha\beta}+\frac{\partial}{\partial s}\varphi(s(0,Z),t)\bar{z}^\alpha z^\beta\right]dw^\alpha d\bar{z}^\beta$$

为热方程

$$\frac{\partial H(Z, 0, t)}{\partial t}=\square_Z H(Z, 0, t)$$

的基本解，即(0, 1)形式热核.

证明： 定理只余下证明：对于 B^n 上任何具有紧支集的 $(0,1)$ 形式 $u(Z)=u_{\bar{\alpha}}(Z)\bar{z}^\alpha$（在 $W=0$ 点）均有

$$u(0)=u_\alpha(0)d\overline{w}^\alpha=\lim_{t\to 0+}\int_{B^n}u(Z)\wedge\overline{*_Z H(Z,\ 0,t)} \tag{2.23}$$

为方便计，不失一般地取 $u(Z)=u_1(Z)\bar{z}^1$．于是有

$$\lim_{t\to 0+}\int_{B^n}u_1(Z)dz^1\wedge*\overline{\left(\varphi(s,t)\delta_{\alpha\beta}+\frac{\partial}{\partial s}\ \varphi(s,t)\bar{z}^\alpha z^\beta\right)dw^\alpha d\bar{z}^\beta}$$

$$=\left[\lim_{t\to 0+}\int_{B^n}u_1(Z)\cdot\varphi(s,\ t)*1\ \right]d\overline{w}^1$$

$$+\left[\lim_{t\to 0+}\int_{B^n}u_1(Z)\cdot\frac{\partial}{\partial s}\varphi(s,\ t)z^\alpha\bar{z}^1*1\right]d\overline{w}^\alpha.$$

因此只要证明下列两式就行了：

$$\lim_{t\to 0+}\int_{B^n}u_1(Z)\varphi(s,\ t)*1=u_1(0)\cdot 4c_n, \tag{2.24}$$

$$\lim_{t\to 0+}\int_{B^n}u_1(Z)\left[\frac{\partial}{\partial s}\varphi(s,t)\right]_{s=s(0,Z)}z^\alpha\bar{z}^1*1=0. \tag{2.25}$$

事实上，

$$\lim_{t\to 0+}\int_{B^n}\varphi(s,t)*1=\lim_{t\to 0+}\int_{B^n}\frac{\operatorname{ch}s}{\operatorname{sh}s}\cdot\frac{\partial}{\partial s}(Tf)(s,\ t)*1.$$

由 $r=|Z|^2=\tanh^2 s$，命 $z=\tanh s\cdot u$，$u\bar{u}^T=1$，则有

$$\lim_{t\to 0+}\int_{B^n}\varphi(s,t)*1=\lim_{t\to 0+}\int_{\partial B^n}\dot{u}\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{ch}s}{\operatorname{sh}s}$$

$$\cdot\frac{\partial\varphi(s,\ t)}{\partial s}d\left(\frac{\operatorname{sh}^{2n}s}{2n}\right)$$

$$=c_n \lim_{t\to 0+}\int_0^{+\infty}\varphi(s,t)\frac{1}{\mathrm{sh}^2 s}\cdot \mathrm{sh}^{2n-1}\cdot \mathrm{ch} s ds.$$

注意到

$$f(x,t)=\int_{+\infty}^{x}d\sigma\int_{+\infty}^{\sigma}f_0(\tau, t)d\tau,$$

$$f_0(x,t)=\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-x^2/4t},$$

由于

$$\int_{+\infty}^{\sigma}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-x^2/4t}dx=\frac{1}{\sqrt{t}}\int_{+\infty}^{\sigma}e^{-x^2/4t}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{t}}\int_{+\infty}^{\sigma/2\sqrt{t}}e^{-y^2}dy\cdot 2\sqrt{t},$$

即积分后增加了一个无穷小量 $2\sqrt{t}$ $(t\to 0+)$，因此 $f(x,t)$ 较 $f_0(x,t)$ 关于 t 多出一个无穷小量 $4t$．利用[7] 中的计算可得

$$\lim_{t\to 0+}\int_{B^n}\varphi(s, t)*1=4c_n,$$

其中常数 c_n 为 ∂B^n 的体积.

同法可得

$$\lim_{t\to 0+}\int_{B^n}u_1(Z)\left[\frac{\partial}{\partial s}\varphi(s,t)\right]z^{\sigma}\bar{z}^{-1}*1=0.$$

再利用 u 的连续性及[7]的方法，有

$$\lim_{t\to 0+}\int_{B^n}[u_1(Z)-u_1(0)]\varphi(s, t)*1=0.$$

根据 $$\lim_{t\to 0+}\int_{B^n}u_1(Z)\varphi(s, t)*1$$

$$=\lim_{t\to 0+}\int_{B^n}[u_1(Z)-u(0)]\varphi(s, t)*1$$

$$+u_1(0)\lim_{t\to 0+}\int_{B^n}\varphi(s,\ t)*1=u_1(0)\cdot 4c_n,$$

所以得

$$u(0)=\lim_{t\to 0+}\int_{B^n}u(Z)\wedge\overline{*H(Z,0,t)}.$$

定理证毕.

利用§5.1引理1、引理2以及本节定理2，我们有下面定理.

定理3 复超球 B^n 的(0, 1)形式热核为

$$\begin{aligned}H(Z,W,t)&=H(\varphi_W(Z),\varphi_W(W),t)=H(\varphi_W(Z),0,t)\\&=\Bigg\{\frac{\varphi(s(Z,\ W),\ t)}{1-W\overline{Z}^T}\Bigg(\delta_{\alpha\beta}+\frac{\overline{z}^{\alpha}W^{\beta}}{1-W\overline{Z}^T}\\&\quad+\left[\frac{\partial\varphi(s,\ t)}{\partial s}\right]_{s=s(Z,W)}\\&\quad\cdot\left[\overline{z}^{\alpha}-\overline{w}^{\alpha}+\frac{\overline{z}^{\alpha}W\overline{(Z-W)}}{1-W\overline{Z}^T}\right]\\&\quad\cdot\left[z^{\beta}-w^{\beta}+\frac{w^{\beta}(Z-W)\overline{Z}^T}{1-Z\overline{W}^T}\right]\Bigg]\Bigg\}dw^{\alpha}d\overline{z}^{\beta}.\end{aligned}$$

证明: 将§5.1引理1及引理2的复Jacobi矩阵 $J_C\varphi_W$ 代入本节定理2直接计算即得。

由于 B^n 的热核及其导数当 $t\to+\infty$ 时均趋于0，并且使得它们在(0, $+\infty$)上积分存在，所以 $H(Z,\ W,\ t)$ 亦有同样性质。

定理3 B^n 的(0, 1)–Green形式为

$$G(Z,W)=\int_0^{+\infty}H(Z,\ W,t)dt.$$

证明:

$$\Box_Z\int_0^{+\infty}H(Z,\ W,\ t)dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\Box_Z H(Z,\ W,\ t)dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}H(Z,W,t)dt$$

$$=\lim_{t\to+\infty}H(Z,\ W,\ t)-\lim_{t\to 0+}H(Z,\ W,\ t)$$

$$=-\lim_{t\to 0}H(Z,\ W,\ t)=0\quad (Z\neq W\text{ 时}).$$

另外，对于 B^n 上的任何具有紧支集的(0，1)形式

$$g(Z)=g_\alpha(Z)d\bar{z}^\alpha,$$

我们有

$$\Box_W\int_{B^n}g(Z)\overline{\wedge *_Z G(Z,\ W)}$$

$$=\Box_W\int_{B^n}g(Z)\wedge *_Z\overline{\int_0^{+\infty}H(Z,W,t)dt}$$

$$=\int_{B^n}g(Z)\wedge\Box_W *_Z\int_0^{+\infty}\overline{H(Z,W,t)}\,dt$$

$$(\Box_W *_Z=*_Z\Box_W)$$

$$=\int_{B^n}g(Z)\wedge\int_0^{+\infty}*\,\overline{\Box_W H(Z,\ W,\ t)}\,dt$$

$$=\lim_{t\to 0+}\int_{B^n}g(Z)\wedge\overline{*_Z H(Z,\ W,t)}=g(W).$$

定理 3 证毕．

第六章　多圆盘Δ^n的(0, 1)形式热核及其$\bar{\partial}$方程解的积分表示

§6.1　引　　言

复平面C^1中的单位圆盘$\Delta^1=\{z\in C^1: |z|^2<1\}$. 它上面有熟知的 Poincaré 度量

$$ds^2_{\Delta^1}=\frac{dzd\bar{z}}{(1-|z|^2)^2}. \tag{1.1}$$

我们知道度量(1.1)是 Kähler 度量，并且它在Δ^1的 Möbinus 变换下不变. 度量(1.1)的 Gauss 曲率为

$$k=-\frac{1}{h}\frac{\partial^2 \ln h}{\partial z\partial\bar{z}}=-4,$$

其中

$$h(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-|z|^2)^2}.$$

对于C^n中的单位多圆盘Δ^n，它上面赋有乘积的 Poincaré 度量

$$ds^2_{\Delta^n}=\sum_{j=1}^{n}\frac{dz^jd\bar{z}^j}{(1-|z^j|^2)^2}, \tag{1.2}$$

相应的体积元素为

$$dV_{\Delta^n}=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{(1-|z^j|^2)^2}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^n dz^1\wedge d\bar{z}^1\wedge\cdots\wedge dz^n\wedge d\bar{z}^n$$

设Δ^1的热核为$h(z, w, t)$，$z, w\in\Delta^1$，Δ^1的(0,1)形

式热核为 $H(z, w, t)$, z, $w\in\Delta^1$. 其中 h 及 H 均已求出. 在这一章中，我们利用 $h(z, w, t)$和 $H(z, w, t)$ 显式构造出 $\Delta^n(n>1)$的(0, 1)形式热核 $H_{\Delta^n}(Z, W, t)$, 进而求出 Δ^n 的(0, 1)Green 形式.

对于 C^n 中的强拟凸域 Ω, Хенкий. Г. М, Grauert, Lieb 等给出了 Ω 上$\bar\partial$方程解的积分表示，从而可以进行$\bar\partial$方程解的各种经典范数的估计. 遗憾的是他们的方法不能推广到一般拟凸域的情形. 在本章中，我们利用 Δ^n 的(0,1)形式热核给出了 Δ^n 上 $\bar\partial$ 方程解的积分表示. 需要指出的是：(1)Δ^n 不是强拟凸域，(2) 我们所给的积分表示是关于乘积 Poincaré 度量的，因而在双全纯变换下不变.

§6.2 Δ^n的 (0, 1) 形式热核及(0, 1)-Green形式

设(M,g), (N,h)分别为 m 维和 n 维 Riemann 流形. 它们的积流形记为 $M\times N$. 对于任何 $M\times N$ 上的点 (p, q), $p\in M$, $q\in N$, $M\times N$ 在(p, q)点的切空间为 $T_{(p,q)}(M\times N)$. 易知

$$T_{(p,q)}M\times N\cong T_pM\oplus T_qN\cong T_pM\times T_qN \tag{2.1}$$

今后把 $T_{(p,q)}(M\times N)$ 与 $T_pM\times T_qN$ 及 $T_pM\oplus T_qN$ 等同.

$M\times N$ 上的积度量记为 $g\times h$.

$$\begin{aligned}&(g\times h)((X_p,Y_q), (X'_p, Y'_q))\\&=g(X_p, X'_p)+h(Y_q, Y'_q).\end{aligned} \tag{2.2}$$

取点 $p\in M$ 附近的局部标架场 $X_1,\cdots, X_m$ 及其对偶标架场 $\omega^1, \cdots, \omega^m$,再取点 $q\in N$ 附近的局部标架场 $Y_1, \cdots, Y_n$

及其对偶标架场 $\theta^1, \cdots, \theta^n$. 我们把 (X_i, O_q) 与 X_i 等同，把 (O_p, Y_j) 与 Y_j 等同，把 (X_i, Y_j) 与 X_i+Y_j 等同.

设自然投影 π_M: $M\times N\to M$ 为 $(p,q)\mapsto p$.

π_N: $M\times N\to N$ 为 $(p,q)\mapsto q$,

显然 π_M, π_N 均光滑.

我们仍把 $\pi_M^*(\omega^i)$ 和 $\pi_N^*(\theta^j)$ 分别写为 ω^i 和 θ^j. 记 M 上由 g 决定的 Levi-Civita 联络为 ∇^M, N 上由 h 决定的 Levi-Civita 联络为 ∇^N, $M\times N$ 上由积度量 $g\times h$ 决定的 Levi-Civita 联络为 $\nabla^{M\times N}$.

由(2.2)式知 $M\times N$ 的度量矩阵(关于 $X_1,\cdots,X_m$; Y_1, $\cdots$, Y_n)为

$$G\oplus H=\begin{bmatrix}G & 0\\ 0 & H\end{bmatrix}, \qquad (2.3)$$

其中 G, H 分别为 M 和 N 的度量矩阵，即

$$G=(g(X_i, X_j))_{1\leqslant i,j\leqslant m},$$

$$H=(h(Y_k,Y_l))_{1\leqslant k,l\leqslant n}.$$

根据 $\quad (X_1,Y_1)(g\times h)((X_2,Y_2), (X_3,Y_3))$

$$=(g\times h)(\nabla^{M\times N}_{(X_1,Y_1)}(X_2,Y_2),(X_3,Y_3))$$

$$+(g\times h)((X_2,Y_2),\nabla^{M\times N}_{(X_1,Y_1)}(X_3,Y_3))$$

$$=(X_1, Y_1)[g(X_2,X_3)+h(Y_2,Y_3)]$$

$$=X_1g(X_2, X_3)+Y_1h(Y_2, Y_3)$$

$$=g(\nabla^M_{X_1}X_2, X_3)+g(X_2, \nabla^M_{X_1}X_3)$$

$$+h\nabla^N_{Y_1}Y_2, Y_3)+h(Y_2, \nabla^N_{Y_2}Y_3)$$

$$= (g\times h)((\nabla^M_{X_1}X_2+\nabla^N_{Y_1}Y_2),\ (X_3,\ Y_3))$$
$$+ (g\times h)((X_2,Y_2),(\nabla^M_{X_1}X_3+\nabla^N_{Y_1}Y_3)),$$

所以有

$$\begin{aligned}&\nabla^{M\times N}_{(X_1,Y_1)}(X_2,Y_2)\\&=(\nabla^M_{X_1}X_2,\ \nabla^N_{Y_1}Y_2)\\&=\nabla^M_{X_1}X_2+\nabla^N_{Y_1}Y_2,\end{aligned}\tag{2.4}$$

$X_1,\ X_2,\ X_3\in TM,\ Y_1,\ Y_2,\ Y_3\in TN.$

关于换位运算有

$$\begin{aligned}&[(X_1,\ Y_1),(X_2,Y_2)]=[X_1+Y_1,X_2+Y_2]\\&=[X_1,\ X_2]+[Y_1,\ Y_2]+[Y_1,X_2]+[X_1,Y_2]\\&=[X_1,X_2]+[Y_1,Y_2].\end{aligned}\tag{2.5}$$

这是因为 $[X_1,Y_2]=[Y_1,X_2]=0$.

所以对于曲率算子有

$$\begin{aligned}&R((X_1,Y_1),(X_2,Y))(X_3,Y_3)\\&=R(X_1,X_2)X_3+R(Y_1,Y_2)Y_3\end{aligned}\tag{2.6}$$

及 $\langle R((X_1,Y_1),(X_2,Y_2))(X_3,Y_3),(X_4,Y_4)\rangle_{M\times N}$
$$=\langle R(X_1,X_2)X_3,X_4\rangle_M+\langle R(Y_1,Y_2)Y_3,Y_4\rangle,$$

$X_i(1\leqslant i\leqslant 4)$为 M 的切向量，$Y_i(1\leqslant i\leqslant 4)$为 N 的切向量.

引理1 设 M 和 N 为两个 Riemann 流形，它们上的 Hodge-deRham 算子分别为 Δ_M 和Δ_N，则有

$$\Delta_{M\times N}=\Delta_M+\Delta_N,$$

即对于任何 $\psi\in\Lambda^r(M)$和$\varphi\in\Lambda^s(N)$(这里我们要求 $1\leqslant r+s\leqslant \dim M+\dim N$)关于 $M\times N$ 上的 $r+s$ 形式 $\pi^*_M\psi\wedge\pi^*_N\varphi$ 有

$$\Delta_{M\times N}(\pi^*_M\psi\wedge\pi^*_N\varphi)$$

$$= \pi_M^*(\Delta_M \psi) \wedge \pi_M^* \varphi + \pi_M^* \psi \wedge \pi_N^*(\Delta_N \varphi).$$

证明： 由于

$$d_{M \times N} = \sum_{i=1}^{m} \omega^i \wedge \nabla_{X_i}^M + \sum_{j=1}^{n} \theta^j \wedge \nabla_{Y_j}^N$$

$$= d_M + d_N$$

及

$$\delta_{M \times N} = -\sum_{i=1}^{m} I(X_i) \nabla_{X_i} - \sum_{j=1}^{n} I(Y_j) \nabla Y_j$$

$$= \delta_M + \delta_N,$$

因此有

$$\Delta_{M \times N} = d\delta + \delta d$$

$$= (d_M + d_N)(\delta_M + \delta_N) + (\delta_M + \delta_N)(d_M + d_N)$$

$$= \Delta_M + \Delta_N + (d_N \delta_M + \delta_M d_N) + (\delta_N d_M + d_M \delta_N).$$

又因为

$$d_N \delta_M = -\sum_{j=1}^{n} \theta^j \wedge \nabla_{Y_j} \left(\sum_{j=1}^{m} I(X_i) \nabla_{X_i} \right)$$

$$= -\sum_{i,j} \theta^j \wedge \nabla_{Y_j} (I(X_i) \nabla_{X_i})$$

$$= -\sum_{i,j} \theta^j \wedge I(X_i) \nabla_{Y_j} \nabla_{X_i},$$

而 $$\delta_M d_N = -\sum_{i=1}^{m} I(X_i) \nabla_{X_i} \left(\sum_{j=1}^{n} \theta^j \wedge \nabla_{Y_j} \right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} I(X_i) \left[\theta^j \wedge \nabla_{X_i} \nabla_{Y_j} + \nabla_{X_i} \theta^j \wedge \nabla_{Y_j} \right]$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} I(X_i) (\theta^j \wedge \nabla_{X_i} \nabla_{Y_j})$$

$$= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\theta^j \wedge I(X_i)\nabla_{X_i}\nabla_{Y_j},$$

故得

$$d_N\delta_M + \delta_M d_N = \sum_{i,j}\theta^j \wedge I(X_i)R(X_i, Y_j) = 0.$$

同理可得

$$d_M\delta_N + \delta_N d_M = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\omega^i \wedge I(Y_j)R(Y_i, X_i) = 0.$$

所以有

$$\Delta_{M\times N} = \Delta_M + \Delta_N.$$

引理2 (Fubini 定理) 设 M, N 为两个可定向的流形，$M\times N$ 取其积定向，则对于任何 $\varphi\in\Lambda^m(M)$， $\psi\in\Lambda^n(N)$ ($m=\dim M$, $n=\dim N$)，并且设 φ 和 ψ 均具有紧支集，则有

$$\int_{M\times N}\pi_M^*\varphi\wedge\pi_N^*\psi = \int_M\varphi\cdot\int_N\psi\cdot$$

证明： 由于 ψ 和 φ 均有紧支集，并且

$$\text{Support }(\pi_M^*\varphi\wedge\pi_N^*\psi)\subset\text{Support}\varphi\times\text{Support }\psi.$$

利用单位分解，即把引理化作 $R^m\times R^n$ 的普通 Fubini 定理.

定理1 C^n 中单位多圆盘 Δ^n 的(0, 1)形式热核为

$$H_{\Delta^n}(Z,W,t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}h(z^1,w^1,t)\cdots\widehat{h(z^j,w^j,t)}$$

$$\cdots h(z^n,w^n,t)H(z^j,w^j,t),$$

其中“︿”表示去掉该项，$Z=(z^1,\cdots,z^n)$，$W=(w^1,\cdots,w^n)$，h 和 H 分别为Δ^1 的热核和(0, 1)热核形式.

证明： 由于Δ^1上的Poincaré 度量及Δ^n上的乘积 Poincare 度量均为 Kähler 度量，所以有$\Delta = 2(\bar\partial^*\bar\partial + \bar\partial\bar\partial^*)$. 如我们在第五章的约定，我们取$\square = -4(\bar\partial^*\bar\partial + \bar\partial\bar\partial^*)$，因而这里有$\square = -\frac{1}{2}\Delta$. 根据引理1有

$$\square_{\Delta^n} = \square_{\Delta^1} + \cdots + \square_{\Delta^1}.$$

$$\begin{aligned}
&\square_{\Delta^n} H_{\Delta^n}(Z, W, t) \\
&\quad = \square\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} h(z^1, w^1, t)\cdots\widehat{h}(z^j, w^j, t)\cdots h(z^n, w^n, t) H(z^j, w^j, t)\right\} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big\{\square_{\Delta^1} h(z^1, w^1, t)\cdots\widehat{h}(z^j, w^j, t)\cdots h(z^n, w^n, t) H(z^j, w^j, t) + \cdots \\
&\qquad + h(z^1, w^1, t)\cdots\widehat{h}(z^j, w^j, t)\cdots h(z^n, w^n, t)\square_{\Delta^1} H(z^j, w^j, t)\Big\} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} H_{\Delta^n}(Z, W, t).
\end{aligned}$$

对于Δ^n上任何具有紧支集的(0, 1)形式$f(Z) = f_{\bar\beta}(Z)d\bar z^\beta$，有

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0+}\int_{\Delta^n} f_{\bar\beta}(z)d\bar z^\beta \wedge \overline{*_z H_{\Delta^n}(Z, W, t)} \\
&\quad = \lim_{t\to 0+}\int \Delta^{n-1}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} h(z^1, w^1, t)\cdots
\end{aligned}$$

$$\cdot \widehat{h}(z^j, w^j, t)\cdots h(z^n, w^n, t)dV_{\Delta^{n-1}}$$

$$\cdot \lim_{t\to 0+}\int_{\Delta 1} f_{\bar{\beta}}(Z)\, d\bar{z}^\beta \wedge *_{zj} \overline{H(z^j, w^j, t)}$$

$$= \lim_{t\to 0+}\int\Delta_{n-1}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(h(z^1, w^1, t)\cdots\widehat{h}(z^j, w^j, t)$$

$$\cdots h(z^n, w^n, t) f_{\bar{j}}(z^1, \cdots, z^{j-1}, w^j, z^{j+1}, \cdots, z^n)dV_{\Delta^{n-1}}\Big)d\bar{w}^j$$

$$= \sum_j f_{\bar{j}}(w^1, \cdots, w^n)d\bar{w}^j = f(W).$$

定理 1 证毕.

与 § 5.2 定理 3 相同，我们有

定理2 C^n 中单位多圆盘 Δ^n 的(0, 1)-Green 形式为

$$G_{\Delta^n}(Z, W) = \int_0^{+\infty} H_{\Delta^n}(Z, W, t)dt.$$

§ 6.3 Δ^n上$\bar{\partial}$方程的解

在本书中，我们利用上一节的结果给出并证明了下面定理：

定理1 设 $g(Z) = g_{\bar{\alpha}}(Z)d\bar{z}^\alpha$ 为 Δ^n 上具有紧支集的可微分(0, 1)形式，并适合方程 $\bar{\partial}g = 0$，则

$$u(W) = \bar{\partial}^*\int_{\Delta^n} g(Z)\wedge *_Z \overline{G_{\Delta^n}(Z, W)}$$

为非齐次$\bar{\partial}$方程 $\bar{\partial}u(w) = g(w)$ 的解. 它在 $\partial\Delta^n$ 上为零.

由于 Δ^1(关于 Poincaré 度量 $ds^2_{\Delta^1} = \dfrac{dzd\bar{z}}{(1-|z|^2)^2}$)的 Gauss

曲率(亦即全纯截曲率)为常数 -4，由[6]或[80]可知，关于 Δ^1 的热核 $h(r(z,\ w),\ t)$ 有如下估计：

$$c_2 t^{-1/2} e^{-2t} e^{-r^2/(4t)} \left(\frac{r}{f(r)}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant h(r,t)$$

$$\leqslant c_2 t^{1/2} e^{-4t} e^{-r^2/(4t)} \left(\frac{r}{f(r)}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.1}$$

其中 $r=r(z,\ w)$ 为 z 到 w 的测地距离，$c_2=(4\pi)^{-1/2}$，$f(r)=\frac{1}{4}\mathrm{sh}4r$. 因此有，当 $r\to+\infty$ 时，

$$h(r,\ t)=A(t)e^{-r^2/(4t)}r^{-1/2}e^{-2r},$$

其中 $A(t)$ 介于 $t^{-1/2}e^{-2t}$ 与 $t^{-1/2}e^{-4}$ 之间. 若 t 固定，则 $e^{-r^2/4t}r^{1/2}\to 0\quad (r\to+\infty)$.

另外考虑 Δ^1 的(0, 1) 形式热核 $H_{\Delta^1}(z,w,\ t)$. 由于 H_{Δ^1} 是由积分变换 Tf 及 $\frac{\mathrm{ch}r}{\mathrm{sh}r}\frac{\partial}{\partial r}(Tf)$ 和 $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mathrm{ch}r}{\mathrm{sh}r}\frac{\partial}{\partial r}(Tf)\right)$ 所决定的，而

$$f(\sigma,\ t)=\int_{+\infty}^{\sigma}dx\int_{+\infty}^{x}f_0(\tau,\ t)d\tau,$$

其中 $f_0=\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\tau^2/(4t)}$ 为 $\mathbf{R}^1$ 的热核.

因为 $f(\sigma,\ t)=O(\sigma^{-2})P(t)f_0(\sigma,\ t)\quad (\sigma\to+\infty)$，$P(t)$ 为 t 的函数，把上式代入积分变换 Tf 中，可得

$$(Tf)(r,\ t)=O(r^{-2})\overline{P}(t)h_{\Delta^1}(r,\ t).$$

因而 $H_{\Delta^1}(z,\ w,\ t)$ 的系数，当 $r\to+\infty$ 时，其阶同于

$$e^{-2},O(r^{-2}).$$

引理 1 设 $A(W)=A_{\bar{a}}(W)\mathrm{d}\overline{w}^a$，$B(W)=B_{\bar{a}}(W)dW^a$ 为 Δ^n 的某一邻域上的可微分的(0,1)形式，则在 Δ^n 的邻域内存

在可微分函数 $f_1(W)$，$f_2(W)$，使得在 $\Delta^n(\rho)$ $(0<\rho<1)$ 内有

$$A\wedge *\partial\bar{B}=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{(1-|w^j|^2)^2}f_1(W)\omega_\rho(W).$$

实际上，

$$A\wedge *\bar{\partial}B=h(W)h^{\alpha\bar{\lambda}}(W)h^{\beta\bar{\mu}}(W)\left[\frac{w^\lambda}{\rho}A_{\bar{\mu}}-\frac{w^\mu}{\rho}A_{\bar{\lambda}}\right]$$

$$\times\left(\frac{\partial\bar{B}_{\bar{\beta}}}{\partial w^\alpha}-\frac{\partial\bar{B}_{\bar{\alpha}}}{\partial w^\beta}\right)\omega_\rho(W)$$

把 $h(W)=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{(1-|w^j|^2)^2}$，$h^{\alpha\bar{\lambda}}=\delta^{\alpha\bar{\lambda}}(1-|w^\alpha|^2)$ 代入上式即可.

引理 2 设 $g(Z)=g_\alpha(Z)d\bar{z}^\alpha$ 在 Δ^n 内可微分且有紧支集，命

$$\omega(W)=\int_{\Delta^n}g(Z)\wedge *_z\overline{G(Z,W)},$$

则 $\omega(W)$ 适合

$$(\bar{\partial}\omega,\bar{\partial}\omega)=(\omega,\bar{\partial}^*\bar{\partial}\omega)$$

及

$$(\bar{\partial}^*\bar{\partial}\omega,\bar{\partial}^*\bar{\partial}\omega)=(\bar{\partial}\omega,\bar{\partial}\bar{\partial}^*\bar{\partial}\omega).$$

事实上，由于 $g(Z)$ 具有紧支集，所以存在 $\rho_0(0<\rho_0<1)$ 使得

$$\omega(W)=\left[2\int_{\Delta^n(\rho_0)}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{(1-|z^j|^2)^2}(1-|z^\alpha|^2)^2g_{\bar{\alpha}}(Z)\right.$$

$$\left.\cdot\overline{G_{\alpha\bar{\beta}}(Z,W)}\omega_0(Z)\right]d\bar{w}^\alpha$$

$$= \left[2 \int_{\Delta_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(1-\rho_0|z^j|^2)^2} (1-\rho_0^2|z^\alpha|^2)^2 g_{\bar{\alpha}}(\rho_0 Z) \right.$$

$$\left. \cdot \overline{G_{\bar{\alpha}\beta}(\rho_0 Z, W)} \rho_0^{2n} \omega_0(Z) \right] d\overline{w}^\alpha.$$

由 $G(Z, W) = \int_0^\infty H_{\Delta_n}(Z, W, t) dt$ 之构造知道，$G_{\alpha\bar{\beta}}$ 中含有因子

$$e^{-2r(\rho_0 z^1, w^1)} \cdots e^{-2r(\rho_0 z^n, w^n)}$$

又因为 $r(\rho_0 z, w) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+|\varphi_w(\rho_0 z)|}{1-|\varphi_w(\rho_0 z)|}$,

$$z, w \in \Delta^1.$$

即

$$e^{2r(\rho_0 z, w)} = \frac{(1+|\varphi_w(\rho_0 z)|^2)}{1-|\varphi_w(\rho_0 z)|^2}$$

$$= \frac{(1+|\varphi_w(\rho_0 z)|)^2(|1-\rho_0 \bar{z}' w|)^2}{(1-|w|^2)(1-\rho_0^2|z|^2)},$$

$$w, z \in \Delta^1$$

即得 $e^{-2r(\rho_0 z, w)}$ 与 $(1-|w|^2)$ 同阶 $(w \to \partial\Delta^1)$. 因而可设

$$\omega(W) = \prod_{j=1}^{n} (1-|w^j|^2) u,$$

其中 u 为 $\bar{\Delta}^n$ 的某一邻域内可微分的 (0, 1) 形式，并且 $W \to \partial\Delta^n$ 时 $u \to 0$ (这是因为 $G_{\alpha\bar{\beta}}$ 中有项 $e^{-r^2/(4t)} r^{-1/2}$ 及 $O(r^{-2}) e^{-r^2/(4t)}$)，所以利用引理 1 得

$$\lim_{\rho \to 1} \omega \wedge * \partial \overline{\omega} = 0,$$

即有

$$(\bar{\partial}\omega, \bar{\partial}\omega) = (\omega, \bar{\partial}^* \bar{\partial}\omega).$$

同法可证 $(\bar\partial^*\bar\partial\omega, \bar\partial^*\bar\partial\omega) = (\bar\partial\omega, \bar\partial\bar\partial^*\bar\partial\omega)$.

定理 1 的证明利用了 J. J. Kohn([77])的标准程序证明：当 g 适合 $\bar\partial g = 0$，则 $\bar\partial\bar\partial^*\omega = g$.

由于 $\Box\omega = g$ 及

$$
\begin{aligned}
&(\bar\partial\bar\partial^*\omega - g,\ \bar\partial\bar\partial^*\omega - g) \\
&= (\bar\partial\bar\partial^*\omega - \Box\omega,\ \bar\partial\bar\partial^*\omega - \Box\omega) \\
&= (\bar\partial^*\bar\partial\omega,\ \bar\partial^*\bar\partial\omega) = (\bar\partial\omega,\ \bar\partial\bar\partial^*\bar\partial\omega) \\
&= (\bar\partial\omega,\ \bar\partial\Box\omega) = (\bar\partial\omega,\ \bar\partial g) = 0,
\end{aligned}
$$

故必有 $\bar\partial\bar\partial^*\omega = g$. 定理 1 证毕.

第七章　复投影空间CP^n的（0, 1）形式热核

设 CP^n 的齐次坐标系为$[Z^0, Z^1, \cdots, Z^n]$. 取CP^n的一个局部坐标邻域 $U=\{Z^0=1\}$，因而得到 CP^n 的一个非齐次的局部坐标系$Z=(Z^1,\cdots,Z^n)$. 在该局部坐标系中，Fubini–Study 度量可写为

$$ds^2=(1+Z\bar{Z}^T)^{-1}dZ(I+\bar{Z}^TZ)^{-1}d\bar{Z}^T. \tag{1}$$

由于 U 差一个低一维子族盖过 CP^n，所以下面讨论均在 U 上进行.

我们用 CP^n 的齐次坐标$[Z^0, Z^1, \cdots, Z^n]$来说明酉群 $U(n+1)$在它上面的作用

$$U(n+1)\times CP^n \to CP^n$$

$$(u, [z^0, \cdots, z^n]) \mapsto [(z^0, z^1, \cdots, z^n)\cdot u]$$

该作用显然为齐性作用.

考虑点$[1, 0, \cdots, 0]\in U$，它的非齐次坐标为$(0, \cdots, 0)$，所以记$[1, 0, \cdots, 0]=O\in U$. 我们看一看点 O 的迷向子群是什么.

设$\begin{bmatrix}\lambda & \alpha\\ \beta & v\end{bmatrix}\in U(n+1)$. 由于

$$(1, 0, \cdots, 0)\begin{bmatrix}\lambda & \alpha\\ \beta & v\end{bmatrix}=(1, 0, \cdots, 0),$$

$\alpha=0$，$\beta=0$，$\lambda\bar{\lambda}=1$ 及 $v\bar{v}^T=1$，这表明点 O 的迷向子群 $U(n+1)_O=U(1)\times U(n)$，因而有

$$CP^n=U(n+1)/U(n)\times U(1)$$

所以 CP^n 为对称空间.

置 $e_1=(1, 0,\cdots,0),\cdots,e_{n+1}=(0,\cdots,0, 1)\in C^{n+1}$,自然投射 π: $C^{n+1}\longrightarrow CP^n$, 则 CP^n 中过 $\pi(e_1)$ 的测地线为

$$s\to C(s)=\pi(\cos s\cdot e_1+\sin s\cdot Z),$$

$Z\in C^n$, $\langle Z, Z\rangle=1$, $Z\simeq(0, Z)\in C^{n+1}$, 其中 s 为弧长参数.

在局部坐标系 U 中, 过 $\pi(e_1)$ 的测地线可写为

$$C(s)=\mathrm{tg}s\cdot u, \quad \langle u, u\rangle=1.$$

把 $Z=\mathrm{tg}s\cdot u$ 代入(1)式. $s=s(O, Z)$ 为 U 内点 O 和 Z 间的测地距离. 我们有下面引理.

引理 1 Fubini-Study 度量(1)在局部坐标系 (s, u) 下可写为

$$ds^2_{CP^n}=ds^2+\sin^2 s\cdot du\cdot(I-\sin^2 s\cdot\bar{u}^T u)d\bar{u}^T. \tag{2}$$

Laplace-Betrami 算子为

$$\Delta_{CP^n}=\frac{1}{\sin^{2n-1}s\ \cos\ s}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left(\sin^{2n-1}s\ \cos\ s\cdot\frac{\partial}{\partial s}\right)+\text{不含有}\frac{\partial}{\partial s}\text{的项}. \tag{3}$$

证明: 用 $Z=\mathrm{tg}s\cdot u$ 代入(1)式有

$$\begin{aligned}ds^2_{CP^n}&=(1+\mathrm{tg}^2 s\cdot u\bar{u}^T)^{-1}d(\mathrm{tg}s\cdot u)\\&\quad\cdot(I+\mathrm{tg}^2 s\cdot\bar{u}^T u)^{-1}\overline{d(\mathrm{tg}s\cdot u)^T}\\&=(1+\mathrm{tg}^2 s)^{-1}\cdot\left[\frac{1}{\cos^2 s}ds\cdot u+\mathrm{tg}s\cdot du\right]\\&\quad\cdot(I+\mathrm{tg}^2 s.\bar{u}^T u)^{-1}\left[\frac{1}{\cos^2 s}ds\cdot\bar{u}^T+\mathrm{tg}s\cdot d\bar{u}^T\right]\end{aligned} \tag{4}$$

由于 $(I+\mathrm{tg}^2 s\cdot\bar{u}^T u)^{-1}=\left(I-\dfrac{\mathrm{tg}^2 s}{1+\mathrm{tg}^2 s}\cdot\bar{u}^T u\right)$

$$=(I-\sin^2 s\cdot\bar{u}^T u),$$

所以有

$$ds^2_{CP^n}=\cos^2 s\left[\frac{1}{\cos^2 s}ds\cdot u+\mathrm{tg}s\cdot du\right]\left(I-\sin^2 s\cdot\bar{u}^T u\right)$$

$$\cdot\left[\frac{1}{\cos^2 s}ds\cdot\bar{u}^T+\mathrm{tg}s\cdot d\bar{u}^T\right]$$

$$=ds^2+\cos^2 s[\mathrm{tg}^2 s\cdot dud\bar{u}^T$$

$$-\mathrm{tg}^2 s\ \sin^2 s\ du\cdot\bar{u}^T\cdot u\cdot d\bar{u}^T]$$

$$=ds^2+\sin^2 s du[I-\sin^2 s\cdot\bar{u}^T u]d\bar{u}^T.$$

(3)式由(2)式立即可得，引理证毕.

现在我们比较 CP^n 上的 Fubini–Study 度量与超球上的度量：

$$ds^2_{B^n}=\left[\frac{\delta_{\alpha\beta}}{1-|Z|^2}+\frac{\bar{z}^\alpha\bar{z}^\beta}{(1-|Z|^2)^2}\right]dz^\alpha d\bar{z}^\beta$$

$$=\frac{dZd\bar{Z}^T}{1-|Z|^2}+\frac{dZ(\bar{Z}^T Z)d\bar{Z}^T}{(1-|Z|)^2}$$

$$=(1-Z\bar{Z}^T)^{-1}dZ\cdot(I-\bar{Z}^T Z)^{-1}d\bar{Z}^T. \tag{5}$$

令 $Z=\tanh r\cdot u$， $u\bar{u}^T=1$， r 为 O 到 Z 的双曲测地距离，并把 $Z=\tanh r\cdot u$ 代(5)式，有

$$ds^2_{B^n}=(1-\tanh^2 r\cdot u\bar{u}^T)^{-1}d(\tanh r\cdot u)\ (I-\tanh^2 r\cdot\bar{u}^T u)^{-1}$$

$$\cdot d\ \overline{\tanh r\cdot u}^T$$

$$=(1-\tanh^2 r)^{-1}d(\tanh r\cdot u)(I-\tanh^2 r\cdot\bar{u}^T)^{-1}$$

$$\cdot d(\tanh r\cdot\bar{u}^T)$$

若做一变换 $r=\sqrt{-1}s$，由于

$$\tanh\sqrt{-1}s=\frac{e^{\sqrt{-1}s}-e^{-\sqrt{-1}s}}{e^{\sqrt{-1}s}+e^{-\sqrt{-1}s}}=\sqrt{-1}\operatorname{tg}s,$$

所以我们有

$$ds^2_{B^n}=(1+\operatorname{tg}^2s\cdot u\bar{u}^T)^{-1}d(\operatorname{tg}s\cdot u)(I+\operatorname{tg}^2s\cdot\bar{u}^Tu)^{-1}\cdot d(\operatorname{tg}s\cdot\bar{u}^T),\tag{7}$$

其中 $s=-\sqrt{-1}r$，r 为 O 和 Z 间的双曲测地距离. 这样形式上(7)式与(4)相同.

在局部坐标邻域 U 内，设 CP^n 的(0，1)形式热核为

$$H(Z,W,t)=H_{\alpha\bar\beta}(Z,W,t)dw^\alpha d\bar z^\beta,\quad W,Z\in U$$

即它为热方程 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\square u$ 的基本解. 其中□为通常$\bar\partial$-LaPace算子的−4 倍. 自然它是不变微分算子. 我们要求 $H(Z,W,t)$ 在 $\mathrm{Iso}(CP^n)$下不变，即

$$H(T(Z),T(W),t)\equiv H(T([1,Z]),T([1,W]),t)=H(Z,W,t),\quad T\in\mathrm{Iso}(CP^n).$$

由于 CP^n 为齐性复流形，所以存在变换$\varphi_W\in\mathrm{Iso}(CP^n)$，使得 $\varphi_W(W)=O$，即 $\varphi_W([1,W])=[1,O]=[1,0,\cdots,0]$.

由于 $\quad H(\varphi_W(Z),\varphi_W(W),t)=H(\varphi_W(Z),O,t)$

及 $\quad \square_{T(Z)}H(T(Z),T(O),t)=\square_Z H(Z,O,t)$，

因而求解方程

$$\frac{\partial H(Z,W,t)}{\partial t}=\square_Z H(Z,W,t)$$

就只需求解方程

$$\frac{\partial H(Z,\ O,\ t)}{\partial t}\square_Z H(Z,\ O,\ t)$$

即可.

酉群齐性作用在 CP^n 上，并且点$[1,\ 0,\cdots,0]$的迷向子群为 $U(1)\times U(n)$. 我们从上面知道 $H(Z,\ O,\ t)$在该迷向子群下不变，所以 $H(Z,\ O,\ t)$在该迷向子群的子群

$$\{(\begin{smallmatrix}1&0\\0&u\end{smallmatrix});\ u\in U(n)\}\cong U(n)$$

下亦不变，即

$$\begin{aligned}H(Z,O,t)&=H([1,Z],[1,0],t)\\&=H([1,Z][\begin{smallmatrix}1&0\\0&u\end{smallmatrix}],[1,0][\begin{smallmatrix}1&0\\0&u\end{smallmatrix}],t)\\&=H(Z\cdot u,O,t),\qquad u\in U(n).\end{aligned}$$

因此函数 $H_{\alpha\bar{\beta}}(Z,O,t)$在酉群 $U(n)$ 作用下不变. 据 H. Wey 定理可设

$$H_{\alpha\bar{\beta}}(Z,O,t)=\varphi(r,t)\delta_{\alpha\beta}+f(r,t)\bar{z}^{\alpha}z^{\beta},$$

这里 $r=|Z|^2=\mathrm{tg}^2s$，s 为 U 中点 O 和 Z 间的(抛物的)测地距离.

根据 $$\begin{aligned}ds^2_{CP^n}&=(1+Z\bar{Z}^T)^{-1}dZ(I+\bar{Z}^TZ)^{-1}d\bar{Z}^T\\&=(1+r)^{-1}dZ(I+\bar{Z}^TZ)^{-1}d\bar{Z}^T\end{aligned}$$

以及$(I+\bar{Z}^TZ)^{-1}=\left(I-\frac{1}{1+Z\bar{Z}^T}\bar{Z}^TZ\right)=\left(I-\frac{1}{1+r}\bar{Z}^TZ\right)$,

我们有

$$\begin{aligned}ds^2_{CP^n}&=(1+r)^{-1}dZ\left(I-\frac{1}{1+r}\bar{Z}^TZ\right)d\bar{Z}^T\\&=\frac{dZd\bar{Z}^T}{1+r}-\frac{1}{(1+r)^2}dZ(\bar{Z}^TZ)\,d\bar{Z}^T\\&=g_{\alpha\bar{\beta}}dZ^{\alpha}d\bar{Z}^{\beta},\end{aligned}$$

其中 $$g_{\alpha\bar{\beta}}(Z)=\frac{\delta_{\alpha\beta}}{1+r}-\frac{\bar{z}^{\alpha}z^{\beta}}{(1+r)^2}.$$

$$g^{\lambda\bar{\mu}}(Z)=(1+r)[\delta^{\lambda\mu}+\bar{z}^{\mu}z^{\lambda}],$$

其中 $Z=(z^1,\cdots,z^n)\in U$

关于联络系数有

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}=g^{\lambda\bar{\mu}}\frac{\partial g_{\alpha\bar{\mu}}}{\partial z^{\beta}}$$

$$=(1+r)(\delta^{\lambda\mu}+z^{\lambda}\bar{z}^{\mu})\frac{\partial}{\partial z^{\beta}}\left[\frac{\delta_{\alpha\mu}}{1+r}-\frac{z^{\mu}\bar{z}^{\alpha}}{(1+r)^2}\right]$$

$$=-\left[\frac{\delta^{\lambda}_{\alpha}\bar{z}^{\beta}+\delta^{\lambda}_{\beta}\bar{z}^{\alpha}}{1+r}\right]\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}(Z). \tag{8}$$

曲率张量为

$$R^{\lambda}_{\alpha\bar{\gamma}\beta}(Z)=\frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}}{\partial\bar{z}^{\gamma}}=-\frac{\partial}{\partial\bar{z}^{\gamma}}\left[\frac{\delta^{\lambda}_{\alpha}\bar{z}^{\beta}+\delta^{\lambda}_{\beta}\bar{z}^{\alpha}}{1+r}\right]$$

$$=-\frac{1}{1+r}\left[\delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\beta}_{\gamma}+\delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\alpha}_{\gamma}\right]+\frac{1}{(1+r)^2}\cdot[\delta^{\lambda}_{\alpha}\bar{z}^{\beta}z^{\gamma}+\delta^{\gamma}_{\beta}\bar{z}^{\alpha}z^{\gamma}]. \tag{9}$$

在 $Z=O$ 处有

$$R^{\lambda}_{\alpha\beta\bar{\gamma}}=\delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\beta}_{\gamma}+\delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\alpha}_{\gamma}.$$

由于 CP^n 齐性，所以上式表明 CP^n 是具有常全纯截曲率的 Kähler 流形，其全纯截曲率为 $+1$.

引理 2 记 $r=|Z|^2$, $\varphi'=\frac{\partial\varphi}{\partial r}$, $\varphi''=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}$, $f'=\frac{\partial f}{\partial r}$,

$f'' = \dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}$，则有

$$\square H(Z,O,t) = 4\{(1+r)[r(1+r)\varphi'' + (n+2r)\varphi' + f]\delta_{\alpha\beta} + [r(1+r)^2 f'' + (1+r)(n+2+5r)f' + (n+2+3r)f + (1+r)\varphi']\bar{z}^\alpha z^\beta\} dw^\alpha d\bar{z}^\beta.$$

证明： 根据 § 2.8 命题 5，我们有

$$\square H(Z,O,t) = (\square H_{\alpha\bar{\beta}}(Z,O,t)dw^\alpha)d\bar{z}^\beta,$$

其中

$$\square H_{\alpha\bar{\beta}}(Z,O,t) = 4g^{\lambda\bar{\mu}}\left[\frac{\partial^2 H_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial z^\lambda \partial \bar{z}^\mu} - \Gamma^{\gamma}_{\beta\mu}\frac{\partial H_{\alpha\bar{\gamma}}}{\partial z^\lambda}\right]. \tag{10}$$

由于

$$H_{\alpha\bar{\beta}}(Z,O,t) = \varphi(r,t)\delta_{\alpha\beta} + f(r,t)\bar{z}^\alpha z^\beta,$$

$$g^{\lambda\bar{\mu}} = (1+r)(\delta_{\lambda\mu} + z^\mu z^\lambda),$$

及

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{(1+r)}\left[\delta^\lambda_\alpha \bar{z}^\beta + \delta^\lambda_\beta \bar{z}^\alpha\right],$$

我们有

$$\begin{aligned}
&g^{\lambda\bar{\mu}} \cdot \frac{\partial H_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial z^\lambda \partial \bar{z}^\mu} \\
&= (1+r)[n\varphi'\delta_{\alpha\beta} + \varphi'' r\delta_{\alpha\beta} + f\delta_{\alpha\beta} + f'\bar{z}^\alpha z^\beta \\
&\quad + nf\bar{z}^\alpha z^\beta + f'\bar{z}^\alpha z^\beta + f'' r\bar{z}^\alpha z^\beta] \\
&\quad + (1+r)[r\varphi'\delta_{\alpha\beta} + \varphi'' r^2\delta_{\alpha\beta} + f\bar{z}^\alpha z^\beta \\
&\quad + f' r\bar{z}^\alpha z^\beta + rf'\bar{z}^\alpha z^\beta + r^2 f''\bar{z}^\alpha z^\beta] \\
&= (1+r)[n\varphi' + \varphi'' r + f + \varphi' r + \varphi'' r^2]\delta_{\alpha\beta} \\
&\quad + (1+r)[(n+2+3r)f' + f''(r+r^2) + f]\bar{z}^\alpha z^\beta.
\end{aligned} \tag{11}$$

又因为

$$-g^{\lambda\bar{\mu}}\bar{\Gamma}^{\gamma}_{\beta\mu}\frac{\partial H_{\alpha\bar{\nu}}}{\partial z^{\lambda}}$$

$$\begin{aligned}
&=[\varphi' r\delta_{\alpha\beta}+f\bar{z}^{\alpha}z^{\beta}+f' r\bar{z}^{\alpha}z^{\beta}+\varphi'\bar{z}z^{\beta}+nf\bar{z}^{\alpha}z^{\beta}\\
&\quad+f' r\bar{z}^{\alpha}z^{\beta}+\varphi' r^{2}\delta_{\alpha\beta}+fr\bar{z}^{\alpha}z^{\beta}+f' r\ \bar{z}^{\alpha}z^{\beta}\\
&\quad+\varphi' r\bar{z}^{\alpha}z^{\beta}+fr\bar{z}^{\alpha}z^{\beta}+f' r^{2}\bar{z}^{\alpha}z^{\beta}\\
&=(\varphi' r+\varphi' r^{2})\delta_{\alpha\beta}+[(2r+n+1)f+(2r+2r^{2})f'\\
&\quad+\varphi'(1+r)]\bar{z}^{\alpha}z^{\beta},
\end{aligned}\tag{12}$$

将(11)式与(12)式相加得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\Box H(Z,O,t)\\
&=\{(1+r)[\varphi' n+\varphi'' r+f+2\varphi' r+\varphi'' r]\delta_{\alpha\beta}\\
&\quad+[r(1+r)^{2}f''+(1+r)(n+2+5r)f'+(n+2+3r)f\\
&\quad+(1+r)\varphi']\bar{z}^{\alpha}z^{\beta}\}dw^{\alpha}d\bar{z}^{\beta}.
\end{aligned}$$

引理 2 证毕.

若 $H(Z,O,t)=[\varphi(r,t)\delta_{\alpha\beta}+f(r,t)\bar{z}^{\alpha}z^{\beta}]dw^{\alpha}d\bar{z}^{\beta}$ 为热方程

$$\frac{\partial H(Z,O,t)}{\partial t}=\Box_{Z}H(Z,O,t)$$

的解，则有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\frac{\partial\varphi}{\partial t}&=r(1+r)^{2}\varphi''+(1+r)(n+2r)\varphi'+(1+r)f\\
&=r(1+r)^{2}\varphi''+(1+r)(n+2r+1)\varphi'\\
&\quad+(1+r)(f-\varphi').
\end{aligned}\tag{13}$$

$$\frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= r(1+r)^2 f'' + (1+r)(n+2+5r)f' + (n+2+3r)f$$
$$+ (1+r)\varphi'$$
$$= [r(1+r)^2 f' + (1+r)(n+2r+1)f]'$$
$$- (1+r)f + (1+r)\varphi'$$
$$= [r(1+r)^2 f' + (1+r)(n+2r+1)f]'$$
$$- (1+r)(f-\varphi'). \tag{14}$$

取特解 $f=\varphi'$，则方程(13)和方程(14)化为

$$\frac{1}{4}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = r(1+r)^2\varphi'' + (1+r)(n+2r+1)\varphi'$$

及 $$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)'[(1+r)^2\varphi'' + (1+r)(n+2r+1)\varphi']'.$$

实际上只剩下一个独立方程

$$\frac{1}{4}\frac{\partial\varphi(f,t)}{\partial t}$$
$$= r(1+r)^2\varphi'' + (1+r)(n+2r+1)\varphi'$$
$$= \frac{(1+r)^{n+1}}{r^n}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{r^n}{(1+r)^{n+1}}\cdot r(1+r)^2\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]. \tag{15}$$

由于 $r=|Z|^2=\mathrm{tg}^2 s$，其中 s 为点 O 和 Z 间的测地距离，把 $r=\mathrm{tg}^2 s$ 代入(15)式有

$$\frac{1}{4}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{1}{4}\frac{\cos s}{\sin^{2n+1}s}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\sin^{2n+1}s}{\cos s}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right],$$

即

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\cos s}{\sin^{2n+1}s}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\sin^{2n+1}s}{\cos s}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right] = L\varphi. \tag{16}$$

证 CP^n 的 Laplace-Beltrami 算子 Δ_{CP^n} 的径向部分为

$$L_1=\frac{1}{\sin^{2n-1}s\cdot\cos s}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left[\sin^{2n-1}s\cdot\cos s\cdot\frac{\partial}{\partial s}\right],$$

则我们有下面引理.

引理3. $LD\varphi(s,t)=DL_1\varphi(s,t)$，其中微分算子

$$D=\frac{\cos s}{\sin s}\cdot\frac{\partial}{\partial s}=\operatorname{ctg}s\cdot\frac{\partial}{\partial s}.$$

证明：

$$DL_1\varphi(s,t)=\operatorname{ctg}s\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{\sin^{2n-1}s\cdot\cos s}\frac{\partial}{\partial s}\left(\sin^{2n-1}s\cos s\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\right]$$

$$=\operatorname{ctg}s\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}+(2n-1)\operatorname{ctg}s\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial s}-\frac{\sin s}{\cos s}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right]$$

$$=\operatorname{ctg}s\cdot\frac{\partial^3\varphi}{\partial s^3}+\operatorname{ctg}s[(2n-1)\operatorname{ctg}s-\operatorname{tg}s]\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial s}\cdot\operatorname{ctg}s\left[(1-2n)\frac{1}{\sin^2 s}-\frac{1}{\cos^2 s}\right],$$

$$LD\varphi=\frac{\cos s}{\sin^{2n+1}s}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\sin^{2n+1}s}{\cos s}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left(\operatorname{ctg}s\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\right]$$

$$=\frac{\cos s}{\sin^{2n+1}s}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\sin^{2n+1}s}{\cos s}\operatorname{ctg}s\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}\right.$$

$$\left.-\frac{\sin^{2n+1}s}{\cos s}\frac{1}{\sin^2 s}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right]$$

$$=\operatorname{ctg}s\cdot\frac{\partial^3\varphi}{\partial s^3}+\operatorname{ctg}s[(2n-1)\operatorname{ctg}s-\operatorname{tg}s]\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}$$

$$-\operatorname{ctg} s\left[\frac{2n-1}{\sin^2 s}+\frac{1}{\cos^2 s}\right]\frac{\partial\varphi}{\partial s}$$

$$=DL_1\varphi(s,\ t).$$

引理 3 证毕。

引理 3 表明：若 $\varphi(s,\ t)$ 适合方程 $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ $L_1\varphi$，则 $D\varphi$ 就是热方程$\frac{\partial u}{\partial t}=Lu$ 的解.

洪毅教授在[11]中写出了复投影空间 CP^n 的热核：

$$h_{CP^n}(Z,\ W,\ t)=\frac{1}{(2\pi)^n}e^{n^2t}\int_\theta^{\pi-\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\cos\varphi}\right)^n$$

$$\cdot h_{S^1}(\varphi,t)\frac{\sin\varphi d\varphi}{\sqrt{\cos^2\theta-\cos^2\varphi}},$$

其中$h_{S^1}(\varphi,\ t)$为 S^1 的热核．根据 § 4.2 引理 4 知

$$h_{U(1)}(\theta,\ t)=h_{S_1}(\theta,\ t)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-(\theta+2k\pi)^2/(4t)}.$$

置

$$h(\varphi,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\varphi}d\sigma\int_{-\infty}^{\sigma}e^{-(\tau+2k\pi)^2/(4t)}d\tau.$$

用第五章中的方法，我们可得下面定理.

定理 1　复投影空间 CP^n 的(0，1)形式热核为

$$H_{CP^n}(Z,\ O,\ t)=\left\{D\varphi(s,\ t)\delta_{\alpha\beta}+\frac{\cos^3 s}{2\sin s}\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\partial}{\partial s}D\varphi(s,t)\bar{z}^\alpha z^\beta\right\}dw^\alpha d\bar{z}^\beta,$$

其中 $\varphi(\theta, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} e^{n^2 t} \int_0^{\pi-\theta} \left(\frac{\partial}{\partial\cos\varphi}\right)^n h(\varphi, t)$

$$\cdot \frac{\sin\varphi d\varphi}{\sqrt{\cos^2\theta - \cos^2\varphi}}.$$

同样我们还有下面定理：

定理2 CP^n 的(0,1)Green 形式为

$$G(Z, O) = \int_0^{+\infty} H_{CP^n}(Z, O, t)\,dt.$$

利用酉群齐性作用在 CP^n 上这条性质，容易写出$H_{CP^n}(Z,W,t)$及$G(Z, W)$来. 详细计算不赘.

参考文献

1 华罗庚.多复变数函数论中的典型域的调和分析.北京:科学出版社,1958

2 陆启铿. 典型流形与典型域. 上海:上海科学技术出版社,1963

3 陆启铿. 微分几何及其在物理学中的应用. 北京:科学出版社,1986

4 陆启铿. 关于常曲率的 Kähler 流形. 数学学报,1966(2),269—281

5 陆启铿. 多复变数函数与酉几何. 数学进展,1956(2),567—662

6 Lu Qikeng. The Heat Kernels of unit disc and polydisc, Reseach Memorandum No. 17, VOl. 3, Institute of Mathematics, Academia Sinica, Beijing: 1987

7 Lu Qikeng. The Heat Kernel of A Ball in C^n, 11B: 1990(1), Chin. Ann. of Math., 1—14

8 Lu Qikeng, Hong Yi. The Heat kernel of the classical domain $R_I(m,n)$, To appear in Proc. SCV at Mittiag-Leffler Inst., 87—88, Princeton Univ. Press, Notes, 1990

9 Lu Qikeng. The Heat kernels of symmetric spaces

10 Lu Qikeng,Lu Keping. The heat kernel of the Unitary group. Preprint

11 Hong Yi. The heat kernels of some symmeric spaces. Preprint

12 汪国强,洪毅. 酉辛群的热核. (待发表)

13 汪国强,洪毅. 几种典型流形及典型域上的热核. (待发表)

14 M. P. Gaffney. Asymptotic distribution associated with the Laplace for forms.Comm.Pure Appl.Math. 1958(11), 535—545

15 Chavel, I. Eigenvalues in Riemannian Geometry. Academic Press, 1984

16 M. Begrer, P.Gauduchon and E. Mazet. Le spectre dune Variete Riemannienne, Lect. Notes in Math. 194, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1974

17 P. Berard. Spectral Geometry: Direct and Inverse Problems. Lect. Notes, in Math. 1207, Springer-Berlag, 1986

18 H. P. Mackean, Jr and I. M. Singer. Curvature and the eigenvalues of the Laplacian. J.Diff. Geom 1967(1), 43—69

19 P. Greiner. An asymptotic expansion for the heat equation. Arch. Rational Mech. Anal., 1971(14), 163—218

20 R. Seeley. Complex powers of an elliptic operator. Singular Integrals, Proc. Sympos. Pure Math., Vol.

10, Amer. Math. SOc. Providence, R. I., 1967. pp. 288—307

21 R. Seeley. Analytic extension of the traces associated with elliptic boundary value problems. Amer J. Math. 1969(91), 963—983

22 Patodi, V. K. Curvature and the eigenforms of the Laplace operator. J. Diff. Geom., 1971(5), 233—249

23 P. B. Gilkey. Curvature and eigenvalues of the Laplacian for elliptic complexes. Adv. Math. 1973 (10), 311—325

24 B. K. Fatodi, Curwatuve and the tundamental soltion of the heat operator, J. Indian Math. soc. 1970(34), 269—285

25 丘成桐，孙理察．微分几何．北京：科学出版社，1988

26 龚升．典型群上的调和分析．北京：科学出版社，1983

27 V. K. Patodi. An analytic proof the Roch-Riemann-Hirzebruch theorem for Kaehler condition for complex manifolds. Inven, Math. 1974(26),231—258

28 P. B. Gilkey. Spectral geometry and Kaehler condition for complex manifolds. Inven. Math, 1974(26), 231—258

29 H. Donnelly. Minakshisundaram's coefficients on Kähler manifolds. Providence, R. I., 1975, 195—203

30 P. B. Gilkey and J. Sacks. Spectral geometry and

manifods of constant holomorphic sectional curvature. proc. Sympos. Pure Math. Vol. 27, Psrt 2, Amer, Soc. Providence, R. I. 1975. PP. 285—289

31 R. Strichartz. Analysis of the Laplacian on a complete Riemannian manifold. J. Funct. Anal., 1983 (52), 48—79

32 H. Hess, R. Schrader and D. A. Uhlenbrock, Kat's inequality and the spectral distribution of Laplacians on Compact Riemannianmanifold. J. Diff. Geom., 1980(15), 27—37

33 M. Reed, B. Simon, Motheds of modern mathmatical Physics, Fourier analysis, Self—adjiontness. Academic Press, New York, 1975

34 S. Gallot and D. Meyer. Oprateurs de curbure et Laplacian des formes differentielles duneVariété Riemannienne. J. Math. Pure Appl., 1975 (54), 259—284

35 严志达，许以超。Lie群及其lie代数.北京：高等教育出版社，1985

36 H. Weyl. The Classical groups. Princeton university press, princeton N. J. 1946

37 C. Chevalley. Theory of Lie groups. I, Princeton, 1946

38 S. Helgason. Differential Geometry, Lie groups and Symmetric Spaces. Academic press, New York, San Francisco, London, 1978

39 陆启铿. 超球不变度量的 Green 式. 中国科学 A. 1988 (11), 1129—1140
40 村上信吾. 齐性流形导引. 上海: 上海科学出版社, 1981
41 J. Morrow, K. Kodaira. Complex Manifolds. Holt. Rinehart and Winston, Inc. New York, 1971
42 S. Kobayashi, K. Nomizu. Foundations of Differential geometry. John Wiley and Sons. Inc. Interscience Division New York, Vol. I. 1963, Vol. II, 1969
43 P. Griffiths. Hermitian differential geometry, Chern classes, and positive vector bundles, in global analysis, Princeton University press, Princeton, N. J., 1969
44 Griffiths. P. and J. Harris. Principles of algebraic geometry. Wiley and Sons, New York, 1978
45 R. O. Well, Jr. Differential Analysis on Complex Manifolds. Springer-Verlag, New York, Heideberg, Berlin, 1972
46 R. Narasimhan. Analysis on real and complex manifolds. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1969
47 W. Rudin. Function theory of the unit ball of C^n. Springer-Verlag, New York, 1980
48 Б. А. Дубровин, С. П. новиов, А. Т. Хомеико. Совеременная Гемемрия; Медогы и прияожения. Москва «Наука», 1979

49 M. Atiyah, R. Bott and V. K. Patodi. On the heat equation and the index theorem. Invent. Math. 1973 (19), 279—330, errata, ibid. 1975(28), 227—280

50 J. Dodziuk. Eigenvalues of the Laplacian and the Heat Equation. Amer. Math. monthy, 1981 (88), 689—695

51 G. Metiver. Spectral asymptotics of the $\bar{\partial}$-Neuman problem. Duke Math. J., 1981(48), 779—806

52 N. Th. Varopoulos. The poisson kernel on positively curved manifolds. J. Funct. Anal., 1981 (44), 359—380

53 S. Minakshisundaram. Eigenfunctions on Riemannian manifolds. J. indian Math. Soc., 1981(17), 158—165

54 J. Cheeger, M. Gromov and M. Taylor. Finite Propagation speed, kernel estimetry for functions of the Laplace operator, and the geometry of a complete Riemannian manifold. J. Diff. Geom, 1982 (17), 15—53

55 J. Cheeger and S-T Yau. A lower bound for the heat kernel. Comm. Pure Appl. Math., 1981(34), 465—480

56 S. Y. Cheng, P. Li, and S-T. Yau. On the upper estimate of the heat kernel of a complete Riemannian manifold. Amer. J. Math., 1981(103), 1021 1063

57 S-T. Tau. Harmonic functions on complete Rie-

mannian manifolds. Comm. pure Appl. Meth., 1975 (28), 201—228

58 S-T. Yau. On the heat kernel of a complete Riemannian manifold. Comm. pure Appl., 1978(57), 191—201

59 S-T. Yau. Some function theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry. Indiana Univ. Math. J, 25, No. 1976(7), 595—670

60 Chen, B. Y. Total mean curvature and submanifolds of finite type. World science, Singapore, 1984

61 N. K. Stanton and D. S. Tartakoff. The heat equation for $\bar{\partial}_b$-Laplacian. Comm. P. D. E., 1984(9), 597—686

62 N. K. Stanton. The fundamental solution of the heat equation associated with the ∂-Neuman prolem. J. Analyses Math., 1978(34), 265—274

63 N. K. Stanton. The solution of the $\bar{\partial}$-Neuman problem in a stritly pseudoconves Siegel domain. Invent. Math. 1981(65), 137—174

64 A. Terras. Harmonic Analysis on Symmetric spaces and Applications I, II. Springer-Verlag, 1985, 1990

65 H. WU. The Bochner technique. proc. 1980 Bei jing symp. Diff. Geom. and Diff. Eq., S. S. Chern et al, eds., Science press, Bei jing, and Gordon and Breach, New York, 1982, 929—1071

66 R. L. Diaz. Necessary conditions for subellipticity of $\Box_b$ on pseudoconvex domains. Comm. P. D.E., 1986(11), No. 1,1—61

67 Gromoll, D., Klingenberg, W., and Meyer, W. Riemannsche Geometrie im Grossen. Lect. Notes in Math. 55, Springer-verlag, 1986

68 Gunning, Robert C. and Rossi, Hugo. Analytic fnuctions of Several complex variables. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N, J., 1965

69 G. deRham. Dirrerentiable Manifolds: forms, currents, Harmonic forms. Springer-verlag, Berlin, Heideberg, New York, Tokyo, 1984

70 S. Kobayashi. Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings. Marcel Dekker, Inc, New York, 1970

71 Joseph A. Wolf. Spaces of constant curvature. Mc-graw-Hill book company, 1967

72 O. Loos. Symmetric Spaces I: general theory. W. A. Ben jamin, Inc. New. York, 1969

73 O. Loos. Symmetric spaces ll: compact spaces and classification. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969

74 Thierry Aubin. Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampere Equations, springer-verlag, 1982

75 K. Uhlenbeck. Eigenfunctions of Laplace operator. Bull. Amer. Math. Soc., 1972(78), 1073—1076

76 伍鸿熙，沈纯理，虞言林．黎曼几何初步．北京：北京大学出版社，1989

77 G. B. Folland and J. J. kohn. The Neumann Problem for Cauchy–Riemann complex. Princeton Univ. Press and Univ. of Tokyo press, Princeton, New York, 1972

78 G. B. Folland and E. M. Stein. Estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg group. comm. pure and Appl. Math. 1974(27), 429—522

79 J. J. Kohn. Harmonic intergrals on strongly pseudo-convex manifolds I and II. Annals of Math. 1963 (78), 112—148; 1964(79), 450—472

80 李嘉禹．完备 Riemann 流形上椭圆型方程解的存在性．杭州大学博士论文

81 Barrett O' Nell. Semi-Riemannian Geomerty with Applications to Relativity. New York: Academic press, 1983

82 Warner, W. Foundatations of Differentiable Manifolds and Lie Groups. springer-Verlag, New York-Berlin Heidelberg. 1983

83 M. Kac. Can one hear the shape of a drum? , Amer. Math. monthly 1966(73), No, 4. Part II. 1—23

84 J. Cheeger and D. Ebin. Comparison Theorem in Riemannian Geometry. North-Holland Prblishing company, Willian, 1975

85 M. Boothby. An Introduction to Differential Manifolds and Riemannian Geometry. New YorK: Academic Press, 1975

86 S. Kobayashi. The Differential Geometry of Complex Vector Bundles. Iwanai Shoten, Publishers, Princeton University Press, 1987

87 李炯生,查建国. 线性代数. 合肥: 中国科学技术大学出版社,1989

88 S. Hegason. Groups and Geometric Analysis. Academic, New York, 1984

89 S. Hegason. Topics in Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces, Birkhäuser, Boston, 1981

90 S. Lang, $SL_2(R)$. Springer-Verlag, New York, 1985

91 Alan F. Beardon. The Geometry of Discrite Groups, Spring-Verlag, New York. 1983